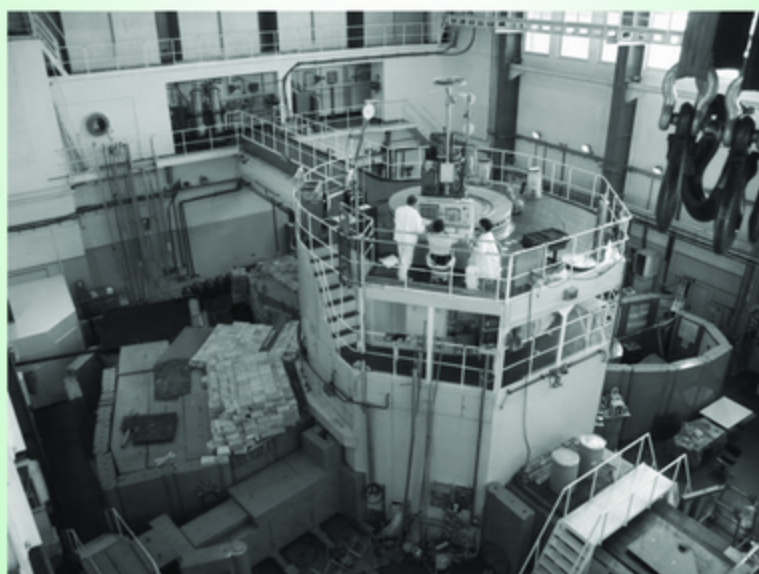


SIMON PÉTER – SZABÓ ATTILA

# MODERN FIZIKA

3., bővített, javított kiadás

SZAKKÖRI JEGYZET



Szilárd Leó  
Tehetséggondozó Alapítvány  
Paks, 2015



SIMON PÉTER – SZABÓ ATTILA

# MODERN FIZIKA

3., bővített, javított kiadás

SZAKKÖRI JEGYZET

Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány  
Paks, 2015

Szerző: Simon Péter (Pécs)

középiskolai tanár

Alkotószerkesztő: Szabó Attila (Pécs)

tanuló

Lektorálta: dr. Sükösd Csaba (Budapest)

egyetemi docens

A szerzők köszönetüket fejezik ki az *MVM Paks II. Atoemrómű Fejlesztő Zrt.*-nek, hogy együttműködése révén lehetővé tette e jegyzet 3. kiadásának megjelentetését.

© Simon Péter, Pécs, 2010, 2013, 2015.

© Szabó Attila, Pécs, 2010, 2013, 2015.

3., bővített, javított kiadás

Kiadja: Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány, Paks

A tördelés és a nyomdai előkészítés a  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  rendszerrel készült.

Műszaki szerkesztő: Szabó Attila

Borítóterv: Szabó Attila

Terjedelem: 9,0 (B/5) ív

Készült az Országos Villamos Távvezeték Zrt. nyomdájában

2015.

## Előszó

A 19. század vége felé úgy tűnt, hogy a fizika nagy kérdéseire megnyugtató, tudományos válaszok születtek. A *Galileo Galilei* és *Isaac Newton* által elkezdett munka teljesen felépítettnek mutatkozott a klasszikus fizika: a mechanika, a hőtan, az elektromágnességtan, és a fénytán fejezeteiben. *Lord Kelvin* így fogalmazott: „... már csak néhány báránnyelűcske árnyékolja be a fizika szép kék egét.” Több mint 100 évvel ezelőtt nem tudták, miért vonalas az atomok színképe. Nem ismerték a fényelektromos jelenség magyarázatát. Nem találták az étert, azt az anyagot, ami közvetíti az elektromágneses hullámokat. Nem tudták egységesen magyarázni a hőmérsékleti sugárzást. Ezek akkoriban apró, a lényegét nem érintő kérdések voltak. Komoly gondolkodók azt vélték, hogy a fenti problémák megoldása már csak apró, jelentéktelen elem a fizika épületén. Megoldásukért nagy babérokra senki nem számíthat, és így a fizika a latin sorsára jut.

*Max Planck* igen tehetséges gyermek volt. Tanulmányi előmenetelére szülei odafigyeltek. *Philipp von Jolly* német fizikaprofesszor lebeszélte a gyermek Planckot, hogy a fizikusi pályát válassza magának. Szerencsére Planck nem fogadott szót. Fizikus lett, és az 1900 végén publikált *kvantumhipotézis* felfedezésével útjának indult a kvantumfizika, mely a 20. század meghatározó tudománya lett. A modern fizika törvényeinek ismeretében többet tudunk a körülöttünk lévő világról, eredményei megjelennek ipari, energetikai, régészeti, orvosi, ... alkalmazásokban.

*Marx György* professzor úr kezdeményezésére a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány (Paks) 1998 óta szervezi és rendezi meg az Országos Szilárd Leó Fizikaversenyt. A versenyen induló diákok elsősorban a modern fizikai ismereteiket mérik össze. Az Olvasó kezében tartott szakköri jegyzet azt a célt szolgálja, hogy a tehetséges, tanulni kívánó diák minél alaposabban felkészülhessen erre a vetélkedőre. A felkészülés közben azonban ne felejtsük el, hogy a fizikaverseny nem cél, hanem eszköz. Eszköz, minél több érdekes tudás megszerzéséhez.

Jó munkát!

Simon Péter  
(középiskolai tanár)

Szabó Attila  
(tanuló)



# Tartalomjegyzék

<b>1. A kvantumhipotézis</b>	<b>9</b>
1.1. Hőmérsékleti sugárzás, fotonok . . . . .	9
1.1.1. Tapasztalati ismeretek . . . . .	9
1.1.2. Elméleti ismeretek . . . . .	11
1.1.3. Feladatok . . . . .	11
1.2. A fényelektromos jelenség . . . . .	13
1.2.1. Történet, tapasztalati tények . . . . .	13
1.2.2. Elméleti ismeretek . . . . .	13
1.2.3. Feladatok . . . . .	14
<b>2. Speciális relativitáselmélet</b>	<b>17</b>
2.1. A relativitáselmélet előzményei . . . . .	17
2.1.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában . . . . .	17
2.1.2. Michelson–Morley-kísérlet . . . . .	18
2.1.3. A kísérlet értelmezése . . . . .	19
2.1.4. Feladatok . . . . .	20
2.2. Relativisztikus kinematika . . . . .	21
2.2.1. Lorentz-transzformáció . . . . .	21
2.2.2. A sebességek transzformációja . . . . .	21
2.2.3. Az ikerparadoxon . . . . .	22
2.2.4. Feladatok . . . . .	23
2.3. Relativisztikus dinamika . . . . .	23
2.3.1. A tömeg és az energia ekvivalenciája . . . . .	24
2.3.2. Relativisztikus tömegnövekedés . . . . .	25
2.3.3. Relativisztikus mozgási energia és lendület . . . . .	26
2.3.4. Négyesimpulzus . . . . .	27

2.3.5.	Relativisztikus Doppler-effektus . . . . .	28
2.3.6.	Feladatok . . . . .	29
<b>3.</b>	<b>A kvantumelmélet alkalmazásai</b>	<b>31</b>
3.1.	Compton-szórás . . . . .	31
3.1.1.	Elméleti vizsgálat . . . . .	31
3.1.2.	Feladatok . . . . .	34
3.2.	Cserenkov-sugárzás . . . . .	35
3.2.1.	A jelenség értelmezése . . . . .	35
3.2.2.	Példák . . . . .	36
3.2.3.	Feladatok . . . . .	36
3.3.	A de Broglie-féle anyaghullám . . . . .	36
3.3.1.	Feladatok . . . . .	38
3.4.	A kvantummechanika alapjai . . . . .	39
3.4.1.	A hely megadása . . . . .	39
3.4.2.	A Heisenberg-féle határozatlansági reláció . . . . .	41
3.4.3.	Feladatok . . . . .	42
<b>4.</b>	<b>Bevezetés a statisztikus fizikába</b>	<b>45</b>
4.1.	Entrópia . . . . .	45
4.1.1.	A II. főtétele . . . . .	45
4.1.2.	Az entrópia fogalma . . . . .	46
4.1.3.	A II. főtétele megfogalmazása az entrópia segítségével . . . . .	47
4.1.4.	Az információ és az entrópia kapcsolata . . . . .	48
4.1.5.	Feladatok . . . . .	49
4.2.	Boltzmann-eloszlás . . . . .	50
4.2.1.	Az ekvipartíció tétele . . . . .	50
4.2.2.	A Boltzmann-eloszlás levezetése . . . . .	50
4.2.3.	Ekvipartíció haladó mozgásokra . . . . .	52
4.2.4.	A félvezetők ellenállása . . . . .	53
4.2.5.	Feladatok . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Atomfizika</b>	<b>57</b>
5.1.	Kötött állapotú elektron vizsgálata . . . . .	57
5.1.1.	Kötött elektron láncmolekulában . . . . .	57
5.1.2.	Kötött elektron téglalapban . . . . .	59

TARTALOMJEGYZÉK	7
5.1.3. Kötött elektron téglatestben . . . . .	60
5.1.4. Feladatok . . . . .	60
5.2. Atommodellek . . . . .	61
5.2.1. Az első atommodellek . . . . .	62
5.2.2. Bohr-modell (1913) . . . . .	64
5.2.3. Kvantummechanikai atommodell – dióhéjban . . . . .	67
5.2.4. Feladatok . . . . .	69
<b>6. A magfizika alapjai</b>	<b>73</b>
6.1. Az atommag szerkezete, a kötési energia . . . . .	73
6.1.1. Kísérleti tapasztalatok . . . . .	73
6.1.2. A nukleáris kölcsönhatás vizsgálata . . . . .	74
6.1.3. A kötési energia . . . . .	75
6.1.4. Feladatok . . . . .	75
6.2. Az atommag cseppmodellje . . . . .	77
6.2.1. Cseppmodell (Gamow, Bohr) . . . . .	77
6.2.2. A nukleáris energiafelület vizsgálata . . . . .	79
6.2.3. Feladatok . . . . .	79
<b>7. Az atommag átalakulásai</b>	<b>81</b>
7.1. Radioaktív bomlások . . . . .	81
7.1.1. Gamma-bomlás . . . . .	81
7.1.2. Béta-bomlás . . . . .	82
7.1.3. Alfa-bomlás, maghasadás . . . . .	84
7.1.4. Magfúzió . . . . .	85
7.1.5. Feladatok . . . . .	86
7.2. Radioaktivitás . . . . .	88
7.2.1. Fogalmak . . . . .	88
7.2.2. Radioaktív órák . . . . .	89
7.2.3. Feladatok . . . . .	91
<b>8. Nukleáris energiatermelés</b>	<b>95</b>
8.1. Maghasadás . . . . .	95
8.1.1. Feladatok . . . . .	96
8.2. Magfizikai lánreakció . . . . .	97
8.2.1. Feladatok . . . . .	98



8.3.	Atomreaktor, nukleáris energiatermelés . . . . .	99
8.3.1.	Feladatok . . . . .	102
8.4.	Atommagfúzió, nukleáris energiatermelés . . . . .	104
8.4.1.	Feladatok . . . . .	105
<b>9.</b>	<b>A magfizika további alkalmazásai</b>	<b>107</b>
9.1.	Nukleáris diagnosztika az orvostudományban . . . . .	107
9.1.1.	Feladatok . . . . .	109
9.2.	Sugárvédelem . . . . .	109
9.2.1.	Kockázatok kvantitatív mérése . . . . .	109
9.2.2.	Ionizáló sugárzások . . . . .	110
9.2.3.	Sugárbiológia . . . . .	111
9.2.4.	Feladatok . . . . .	113
9.3.	Radonprobléma . . . . .	114
9.3.1.	Feladatok . . . . .	116
9.4.	Gyorsítók, izotópdúsítók . . . . .	117
9.4.1.	Ciklotron . . . . .	117
9.4.2.	Diffúziós izotópszétválasztó . . . . .	118
9.4.3.	Feladatok . . . . .	119
<b>A.</b>	<b>Állandók, mennyiségek, mértékegységek</b>	<b>121</b>
A.1.	Mennyiségek és SI-mértékegységeik . . . . .	121
A.2.	Állandók, mértékegységek . . . . .	121
A.2.1.	Prefixumok . . . . .	122
A.2.2.	Alapvető állandók . . . . .	122
A.2.3.	Elektromágneses hullámok adatai . . . . .	126
<b>B.</b>	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>127</b>
<b>C.</b>	<b>A feladatok megoldásai</b>	<b>129</b>
C.1.	A kvantumelmélet alapjai . . . . .	129
C.2.	Relativitáselmélet . . . . .	132
C.3.	A kvantumelmélet alkalmazásai . . . . .	134
C.4.	Statisztikus fizika . . . . .	137
C.5.	Atomfizika . . . . .	139
C.6.	Egyes magfizika-feladatok megoldása . . . . .	143

# 1. fejezet

## A kvantumhipotézis

### 1.1. Hőmérsékleti sugárzás, fotonok

A hőmérsékleti sugárzás elektromágneses természetű, jellemző hullámhossza (hét-köznapos hőmérsékleteken) nagyobb a látható fény 430-780 nm-es adatánál. Minden test minden hőmérsékleten bocsát ki hősugarakat. Ha egy másik test e sugarakat elnyeli, energiát vesz fel és felmelegszik. Ilyen *sugárzási hőátadásra* példa az, ahogy a Nap felmelegíti a Földet.

A testek hősugárzásának átlagos hullámhossza a hőmérséklet függvényében változik, pl. a zseblámpaizzó gyenge telep mellett nem világít, kicsit erősebb teleppel a kibocsátott fény vörös, fehér fényt csak jó teleppel ad (de a sugárzásnak ekkor is csak kb. 10%-a látható).

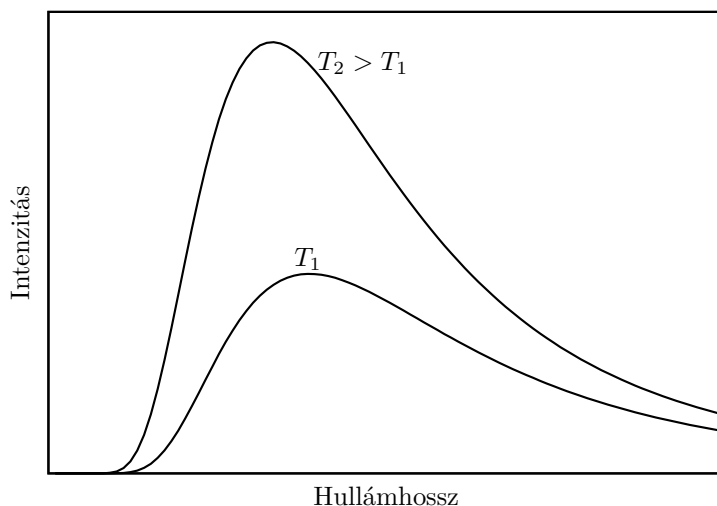
#### 1.1.1. Tapasztalati ismeretek

##### Kirchhoff sugárzási törvénye

A hősugárzás kibocsátására és elnyelésére vonatkozó mérési eredmények elemzése során vették észre, hogy a két jelenség nem független egymástól: amely hullámhosszon és hőmérsékleten egy anyag erősen sugároz, azon jó elnyelő is. *Gustav Kirchhoff* jött rá, hogy ez nem véletlen egybeesés, hanem annak feltétele, hogy egy, hősugárzással energiát cserélő testekből álló rendszer termikus egyensúlyba juthasson. Ő vezette le a következő összefüggést is:

$$P(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)P_0(\lambda, T), \quad (1.1)$$

ahol  $P(\lambda, T)$  egy anyag által adott hőmérsékleten és hullámhosszon kibocsátott sugárzás intenzitása (egységnyi felületen, adott hullámhosszon kibocsátott sugárzási teljesítmény),  $\varepsilon(\lambda, T)$  pedig a  $T$  hőmérsékletű anyagra eső  $\lambda$  hullámhosszú sugárzásból elnyelt energia részaránya ( $0 \leq \varepsilon(\lambda, T) \leq 1$ ).  $P_0(\lambda, T)$  univerzális függvény, azaz minden anyagra azonos: ez (1.1) szerint egy olyan hipotetikus testnek a kibocsátási spektruma, amely minden sugárzást minden hőmérsékleten elnyel: az illetet *abszolút*



1.1. ábra.  $T \cdot \lambda_{\max}$  állandó, értéke  $2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

*fekete testnek*<sup>1</sup> nevezzük. A továbbiakban főleg az abszolút fekete test spektrumával fogunk foglalkozni.

### Wien-féle eltolódási törvény

Az abszolút fekete test hősugárzása különböző hullámhosszakat különböző intenzitással tartalmaz, de van egy, a hőmérséklettől függő olyan hullámhossz, amelynek környezetében az intenzitás a legerősebb. Ez a hullámhossz fordítva arányos az abszolút hőmérséklettel, mint ahogy az az 1.1. ábrán látható, ami két, különböző hőmérsékletű test hullámhossz-intenzitás grafikonját ábrázolja.

### Stefan–Boltzmann-törvény

Tapasztalati tény (és a Planck-féle sugárzási törvényből elméletileg is levezethető), hogy a kibocsátott, valamint az elnyelt sugárzási teljesítmény egyenesen arányos a test abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával ( $T^4$ ), a felülettel ( $A$ ), és egy, az anyagi minőségre jellemző állandóval ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ), amely az  $\varepsilon(\lambda, T)$  függvény egyfajta átlaga:

$$P = \varepsilon \sigma A T^4. \quad (1.2)$$

Az 1.2 egyenletben szereplő  $\sigma$  arányossági tényező neve: *Stefan–Boltzmann-állandó*, értéke:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ . Fontos megjegyezni, hogy abszolút fekete test esetén  $\varepsilon = 1$ .

<sup>1</sup>Az abszolút fekete test legjobb közelítő megvalósítása egy nagy üreg, amelyen egy kis lyukat nyitunk: az itt belépő sugárzás, mielőtt visszajutna a lyukhoz, sokszor visszaverődik az üreg falain, így szinte tökéletesen elnyelődik.

### 1.1.2. Elméleti ismeretek

A sugárzási teljesítmény hullámhossztól való függését (a teljesítményspektrumot) a klasszikus fizika törvényeivel nem lehetett megmagyarázni. Két magyarázat is született a jelenségre:

- Kis frekvenciákon a Rayleigh–Jeans-törvény helyesen adta meg a jelenség magyarázatát, de a frekvencia növekedésével az intenzitás a végtelenig szökött (ultraibolya-katasztrófa).
- Nagy frekvenciákon a helyes magyarázat Wien nevéhez fűződik: ez a képlet kis frekvenciákon „szalad meg” (infravörös-katasztrófa).

A teljes spektrumra vonatkozólag helyes képletet *Max Planck (1858–1947)* német tudós találta meg. A Planck-féle sugárzási törvény abszolút fekete testre:

$$P_0(f, T)df = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} df, \text{ valamint } P_0(\lambda, T)d\lambda = \frac{c^2h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda. \quad (1.3)$$

Az 1.3 egyenletben  $P_0(f, T)df$  a felületegységről időegység alatt kibocsátott  $f$  és  $f + df$  közé eső frekvenciájú elektromágneses energiát,  $P_0(\lambda, T)d\lambda$  a felületegységről időegység alatt kibocsátott  $\lambda$  és  $\lambda + d\lambda$  közé eső hullámhosszú elektromágneses energiát jelöli (mértékegységük  $\frac{W}{m^2}$ ). A hullámhosszra vonatkozó összefüggést ábrázoltuk az 1.1. ábrán.

Planck azonban az 1.3 egyenlet felállításában közben egy olyan hipotézissel állt elő, amely felborította a fény fizikájával kapcsolatos addigi ismereteket: *az energia kibocsátása nem folytonos*. Adott frekvenciájú hullámként kibocsátott energia elemi energiaadagokra oszlik:

$$\text{energiaadag} = \text{energiakvantum} = \text{foton}.$$

Az  $f$  frekvenciájú fényt felépítő fotonok energiája  $E = h \cdot f$ . A képletben  $h$  a *Planck-állandó* (Planck-féle hatáskvantumot) jelöli:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js. A makroszkopikus világban  $h$  kicsisége miatt egy-egy foton nem érzékelhető, így ott az energia joggal tekinthető folytonosan változó mennyiségnek.

A fény részecskék (fotonok) sorozataként fogható fel – egyrészt. Másrészt azonban számos jelenség (a teljes hullámoptika) utal arra is, hogy a fénynek hullámtermészete is van. Ezt összefoglalóan így mondhatjuk: *a fény kettős természetű*.

### 1.1.3. Feladatok

#### †1. feladat.

Milyen hőmérsékletre melegszik fel egy egyenes, kör keresztmetszetű,  $d = 100 \mu\text{m}$  átmérőjű,  $\ell = 10$  cm hosszú volfrámszál vákuumban, ha  $U = 20$  V feszültséget kapcsolunk rá? Tekintsük a volfrámszálát abszolút fekete testnek, és tegyük fel, hogy

---

A feladatok előtt álló † fizikai szempontból nehéz (szokatlan fizikai koncepciót, nemtriviális ötletet vagy a rendes tananyagban és itt sem szereplő ismeretet igénylő) feladatot, ‡ a matematikai szempontból nehéz (pl. az analízis extenzív felhasználását vagy hosszadalmas számolást igénylő) feladatot jelöl, a mérési feladatokat *dőlt feladatszám* jelöli.

a volfrám fajlagos ellenállása magas hőmérsékleten (kb. 200 K felett) arányos a  $T$  abszolút hőmérséklettel. Adat:  $\varrho_{20^\circ\text{C}} = 5,4 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

### †2. feladat.

Egy izzólámpa volfrámszálának keresztmetszete  $r = 25 \mu\text{m}$  sugarú kör, a volfrám sűrűsége  $\varrho = 19,3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , fajhője  $c = 0,134 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ , hőmérséklete világítás közben  $T_0 = 2700 \text{ K}$ . Határozzuk meg, hogy kikapcsolás után mennyi idő múlva lesz a volfrámszál hőmérséklete (a)  $T = 2600 \text{ K}$ ; (b)  $T = 700 \text{ K}$ .

### 3. feladat.

Egy műhold fala belülről teljesen elnyelő, kifelé teljesen visszaverő. A műholdon ablak van, amely semmit sem nyel el a sugárzásból. A műhold a Föld távolságában kering a Nap körül úgy, hogy közben ablakával mindig a Nap felé fordul. A Naptól kb.  $P^* = 8 \frac{\text{J}}{\text{min}\cdot\text{cm}^2}$  teljesítmény jut a Föld távolságában levő egységnyi felületre. Hány fokos lesz a műhold belseje?

### †4. feladat.

Mekkora annak a vörös óriás csillagnak a hőmérséklete, amely a Földtől  $v = 1,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel távolodik, és spektrumában a legnagyobb intenzitású sugárzás hullámhossza a Földről nézve  $\lambda = 750 \text{ nm}$ ? Tekintsük a csillagot abszolút fekete testnek.

### 5. feladat.

Erőmentes térben mozgó elektron mozgási energiája  $q$ -ad része, lendülete  $q$ -szorosa egy foton energiájának, illetve lendületének. Mekkora a foton frekvenciája? Látható-e a foton? Adatok: (a)  $q = 100$ , (b)  $q = 2$ .

### 6. feladat.

Egy He-Ne lézer teljesítménye  $P = 5 \text{ mW}$ , hullámhossza  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , a fénynyaláb átmérője  $d = 2 \text{ mm}$ .

- (a) Hány fotont bocsát ki másodpercenként a készülék?  
 (b) Mekkora a fénynyalábban a fotonok térfogati sűrűsége?

### †7. feladat.

A Földre a Naptól érkező sugárzás felületi teljesítménye  $P^* = 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ .

- (a) Mekkora nyomást fejtenek ki fekete felületre ( $\varepsilon = 1$ ) a fotonok?  
 (b) Mekkora erőt fejt ki a Nap sugárzása a Föld felszínére? A fekete testnek tekinthető Föld sugara  $R = 6370 \text{ km}$ .

### 8. feladat.

Légköri viszonyaink miatt a Nap sugárzásából a Föld felszínére a sugárzásra merőlegesen  $P^* = 520 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  felületi teljesítmény jut.

- (a) Óránként mennyi energiát nyel el egy fa  $D = 20 \text{ m}$  átmérőjű gömb alakú lombkoronája, ha a lombzat a rá eső energia  $\varepsilon = 0,85$  részét nyeli el?  
 (b) Milyen hatásfokkal hasznosítja a fa az elnyelt energiát szőlőcukor készítésére, ha a fa 5 óra alatt  $m = 2,7 \text{ kg}$  tömegű szőlőcukrot állít elő? A szőlőcukor moláris tömege  $M = 180 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , 1 móljának fotoszintéziséhez  $E_k = 2,8 \frac{\text{MJ}}{\text{mol}}$  energia kell.

### †9. feladat.

Egy lézer teljesítménye  $P = 50 \text{ mW}$ , hullámhossza  $\lambda = 663 \text{ nm}$ , a fénynyaláb átmérője  $d = 1 \text{ mm}$ . A lézersugár merőlegesen egy  $m = 5 \text{ g}$  tömegű rögzítettlen fémlemezre esik, ami a fotonok  $\varepsilon = 0,8$  részét elnyeli, a többit visszaveri.

- (a) Mennyi egy foton energiája?

- (b) Hány fotont ver vissza a fémlemez a lézer  $T = 2$  s ideig tartó bekapcsolása alatt?  
 (c) Mekkora nyomás hat a lemezre?  
 (d) Mekkora sebességgel mozog a test a lézer kikapcsolása után, ha a testre semmilyen, nem fénytől eredő erő nem hat?

**10. feladat.**

Egy rádióadó  $P = 50$  kW teljesítménnyel sugároz  $f = 98,1$  MHz frekvenciájú URH-hullámon. Hány fotont emittál másodpercenként?

**11. feladat.**

Mekkora adagokban vehet fel energiát egy  $m = 20$  g tömegű test, ami egy  $D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  rugóállandójú rugóra van függesztve?

## 1.2. A fényelektromos jelenség

Említettük, hogy a fény kettős természetű: részecskeként és hullámként is felfogható. A hullámtermészetet számos jelenség támasztja alá, most a részecsketermeszet egy fontos bizonyítékát mutatjuk be.

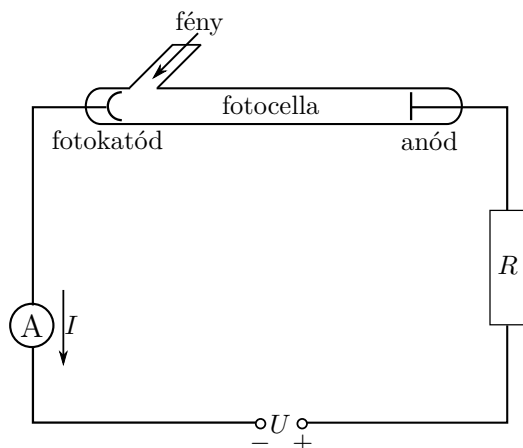
### 1.2.1. Történet, tapasztalati tények

1887-ben *Wilhelm Hallwachs* figyelte meg, hogy egy negatív töltésű fémlap megfelelő (*ultraibolya*) fénnel megvilágítva elveszíti töltését. *Magyarázat:* a megvilágító fény energiát ad át a fém elektronjainak, így azok kilépnek a fémből. Itt azonban, ha a fényt hullámként képzeljük el, problémába ütközünk: elegendően kis intenzitású fényt használva egy elektron kiszakításához szükséges energia néhány óra alatt gyűlne csak össze, viszont nem ismerünk olyan módszert, amellyel az energia ilyen időtávon összegyűjthető lenne. A fény hullámtermészete továbbá azt sem magyarázza, hogy miért csak bizonyos hullámhosszú fény képes kiszakítani az elektronokat. A fényelektromos jelenség gyakorlati felhasználása a fotocella (modern formája a televíziós kamerák egyes típusai), amely áramkörbe foglalva az 1.2. ábrán látható. A fotocellával kapcsolatos tapasztalatok: megvilágítás nélkül a körben nem folyik áram, és megvilágítás hatására is csak akkor, ha a megvilágítás hullámhossza megfelelő: ekkor az áram pillanatszerűen megindul.

### 1.2.2. Elméleti ismeretek

*Lénárd Fülöp* 1900-ban összegezte a fotocellával kapcsolatos tapasztalatokat:

- Elég erős megvilágítás hatására a fotokatódról az elektronok szinte azonnal kilépnek.
- A fény erősségétől kizárólag a kilépő elektronok száma függ.
- A fény frekvenciájától a kilépő elektronok maximális sebessége függ.
- Van egy, a katód anyagára jellemző  $f_0$  küszöbfrekvencia, aminél kisebb frekvenciájú fotonok nem váltanak ki elektronokat.



1.2. ábra. A fotocella áramkörben

E tapasztalatokat a fény hullámtermészete alapján nem lehet megmagyarázni – Planck elmélete alapján azonban igen. Ezt *Albert Einstein* tette meg 1905-ben. Szerinte minden kilépő elektront egy foton lendít ki. Ez az utolsó tapasztalatra ad magyarázatot: minden anyagnak van egy jellemző  $W_{\text{ki}}$  *kilépési munkája*, ami azt a munkát adja meg, ami az elektron fémtől való elszakításához kell. Ha egy foton energiája ennél kevesebb, az elektron nem lendülhet ki, különben *a foton energiája fedezi a kilépési munkát és a kiszakított elektron mozgási energiáját*:

$$hf = W_{\text{ki}} + \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.4)$$

Ez az 1905-ben napvilágot látott *fotoelektromos egyenlet*, amelyért Einstein 1921-ben fizikai Nobel-díjat kapott. Az egyenlet alapján valamennyi tapasztalat jól magyarázható: a jelenség a fény részecske jellegét támasztja alá.

### 1.2.3. Feladatok

#### 1. feladat.

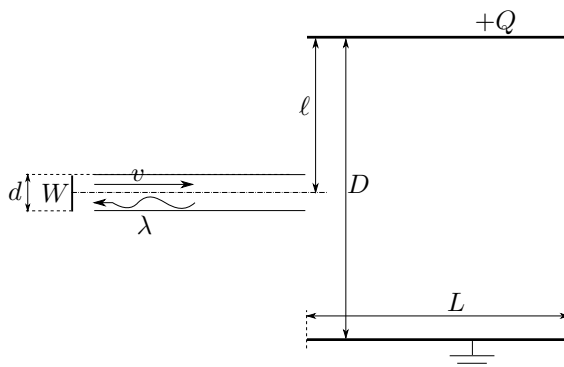
Fotocellát  $\lambda = 750$  nm hullámhosszú fényvel világítunk meg. A kiszakított elektronokat  $U = 1,2$  V ellenfeszültség fékezi le. Mekkora a fém kilépési munkája?

#### 2. feladat.

Fotocella katódját először zöld, majd kék fényvel világítjuk meg. Az anód és a katód közé kötött kondenzátor a második esetben  $\Delta U = 0,32$  V-val nagyobb feszültségre töltődik fel. Mennyi a két fény frekvenciájának különbsége?

#### 3. feladat.

Egy fotocella két kivezetését  $C = 2$  nF kapacitású kondenzátor fegyverzeteihez kötjük. A  $W = 2 \cdot 10^{-19}$  J kilépési munkájú katódot  $\lambda = 425$  nm hullámhosszúságú,  $P = 5$  W teljesítményű lézertfényel világítjuk meg.



1.3. ábra. A 8. feladathoz.

- Mekkora egy foton energiája?
- Hány foton érkezik másodpercenként a katódra?
- Mekkora maximális sebességgel hagyják el az elektronok a katódot?
- Mekkora feszültségre töltődik fel a kondenzátor?
- Hány elektron szükséges ehhez?

**4. feladat.**

Egy fotocella katódját  $\lambda = 550$  nm hullámhosszúságú monokromatikus,  $P = 10$  mW teljesítményű fényel világítjuk meg. A fotokatód kilépési munkája  $W = 0,34$  aJ.

- Mekkora a kilépő elektronok maximális sebessége?
- Mekkora a fotocella áramának maximális értéke, ha minden ötödik katódba csapódó foton vált ki fotoeffektust?

**5. feladat.**

Lézerfényel világítjuk meg a  $W = 0,32$  aJ kilépési munkájú fotokatódot. Mekkora legyen a lézerfény  $\lambda$  hullámhossza, hogy a katódból kilépő elektron  $p_e$  és a katódra érkező foton  $p_f$  lendületének aránya,  $k = \frac{p_e}{p_f}$  maximális legyen? Mekkora ekkor  $k$  értéke?

**6. feladat.**

$W = 0,32$  aJ kilépési munkájú fotocella kivezetéseire egy kondenzátort kötünk. A fotocellát ezután  $\lambda = 410$  nm hullámhosszú fényel világítjuk meg, és így a lehető legjobban feltöltjük a kondenzátort. Milyen hatásfokkal végeztük a feltöltést? (A hasznos energia a kondenzátor hordozta elektromos energia, a feltöltődés okozta elektronlasító hatást addig nem vesszük figyelembe, amíg az elektron nem áll meg.)

**7. feladat.**

*Hallwachs* kísérletét reprodukáljuk: egy  $W = 0,69$  aJ kilépési munkájú cinklemez  $Q = -1 \cdot 10^{-6}$  C töltéssel töltünk fel, majd egy nagyjából monokróm,  $\lambda$  hullámhosszú,  $P = 10$  mW teljesítményű lámpával világítjuk meg. A lemez pillanatszerűen elveszíti töltését.

- Határozzuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahova  $\lambda$  eshet.
- Mennyire pillanatszerű a töltésvesztés? Legkevesebb mennyi idő kell hozzá?



**†8. feladat.**

Az 1.3. ábrán látható elrendezésben egy  $W = 0,21$  aJ kilépési munkájú,  $d \rightarrow 0$  átmérőjű fémlamezt helyezünk egy síkkondenzátor elé, aminek fegyverzetei merőlegesek a fémlamezre, távolságuk  $D = 10$  cm, a lemezre merőleges hosszuk  $L = 20$  cm. A lemezt egy hosszú fémhengerrel vesszük körbe; e henger tengelye a pozitív töltésű fegyverzettől  $\ell = 5$  cm távolságra helyezkedik el. A kondenzátort igen nagy töltésre feltöltjük, majd a lemezt  $\lambda = 600$  nm hullámhosszúságú fénnel világítjuk meg. Mekkora lesz a kondenzátor feszültsége az egyensúly beállta után?

**9. feladat.**

Egy, a feladatban vizsgált távolságokhoz képest igen nagy méretű,  $\sigma = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  pozitív felületi töltéssűrűségű,  $W = 0,41$  aJ kilépési munkájú fémlamezt  $\lambda = 400$  nm hullámhosszúságú fénnel világítunk meg.

- (a) Mekkora távolságban található még elektronok a fémlameztől?
- (b) Mekkora sebességgel érkeznek vissza az elektronok a fémlamezre?

## 2. fejezet

# Speciális relativitáselmélet

### 2.1. A relativitáselmélet előzményei

#### 2.1.1. A relativitás elve a klasszikus mechanikában

A relativitás elvét először *Galilei* mondta ki: a fizika törvényei bármely két inerciarendszerben azonos alakúak, nincs olyan kitüntetett, *abszolút vonatkoztatási rendszer*, amihez viszonyított abszolút sebességünket meg lehetne adni a saját vonatkoztatási rendszerünkben való kitekintés nélkül. A newtoni mechanika emellett feltételezi az *egyidejűség abszolút voltát* (ezt mindennapi tapasztalataink jól alátámasztják): ebből a két feltevésből vezethető le a *Galilei-transzformáció*:

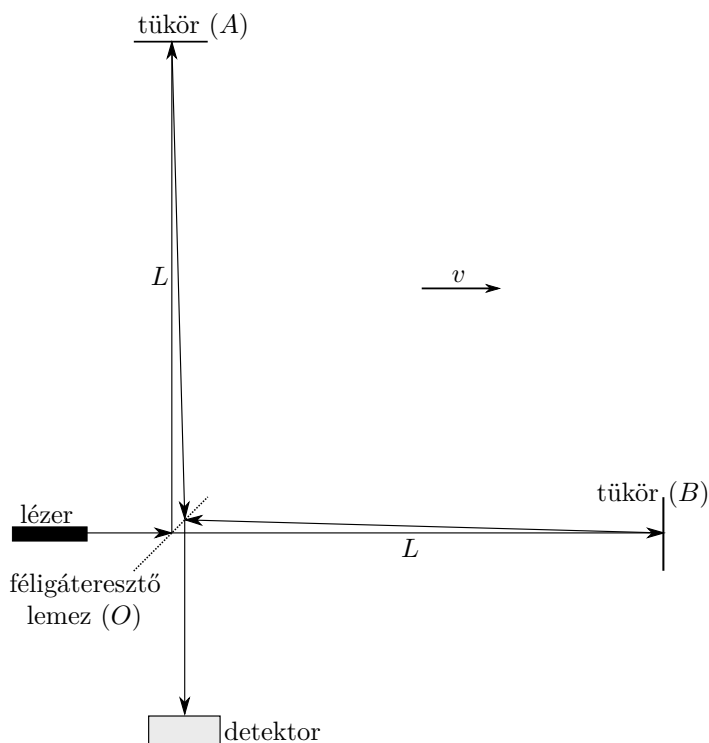
$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (2.1)$$

A 2.1 egyenletben  $(x; y; z; t)$  egy pont tér- és időbeli koordinátái egy inerciarendszerben, míg  $(x'; y'; z'; t')$  ugyanennek a pontnak a koordinátái egy, a fenti rendszerhez képest  $+x$  irányba  $v$  sebességgel mozgó inerciarendszerben. Ha a newtoni mechanika egyenleteiben elvégezzük a Galilei-transzformációt, azok alakja nem változik: ez a tény fejezi ki a relativitás elvét a klasszikus mechanikában.

Sokáig azt feltételezték, hogy a Galilei-transzformációt bármilyen fizikai jelenség egyenleteire alkalmazva, azok alakja nem változik, azaz a teljes fizika *Galilei-invariáns*. Ez azonban nem bizonyult igaznak: az elektromágnesség Maxwell-egyenletein elvégezve a Galilei-transzformációt, *nem kapjuk vissza az eredeti egyenleteket*.

A Galilei-invarianciát sértő jelenség komolyan zavarta az invarianciára épülő fizikai képet. A problémát először a Maxwell-egyenletek módosíthatásával próbálták áthidalni: új tagokat adtak az egyenletekhez, amelyekkel azok már Galilei-invariánsak lettek, azonban minden ilyen módosítás olyan elektromágneses jelenségek létét jelentette volna, amelyek kísérleti úton nem voltak megfigyelhetők. A fizika tehát kénytelen volt elfogadni, hogy van olyan jelenség, amely nem Galilei-invariáns.

Ez azt jelentené, hogy a relativitás elve nem igaz, elektromágneses (optikai) jelenségekkel meg lehet mérni egy vonatkoztatási rendszer abszolút sebességét az *éter*hez



2.1. ábra. A Michelson–Morley-kísérlet

(az elektromágneses hullámokat közvetítő hipotetikus közeghez) képest. Számos ilyen kísérletet terveztek és hajtottak végre, ezek közül egyet elemzünk részletesen.

### 2.1.2. Michelson–Morley-kísérlet

Vegyünk egy koherens fényt kibocsátó fényforrást (a mai technika mellett lézert). A sugarat kissé ezüstözött, részben visszaverő, részben fénytengedő üveglapra ejtjük. A kettévált sugarat két tükörről veretjük vissza: ezek egyforma  $L$  távolságban vannak a féligáteresztő lemeztől. A két tükörről visszaverődő fénysugarak a lemezen áthaladva, illetve arról visszaverődve egy detektoron találkoznak, ahol interferencia lép fel. A teljes elrendezés a 2.1. ábrán látható (a sugarak kismértékű eltérése csak az ábra jobb értelmezhetőségét szolgálja).

Ha a berendezés nyugalomban van az éterhez képest, a két irányból visszaverődő fénysugarak azonos időt töltenek úton, emiatt nincs közöttük fáziskülönbség (a törés és visszaverődés okozta fáziseltolódások azonosak a két fénysugárra), így a detektoron az interferencia erősítő lesz.

Tegyük most fel, hogy az eszköz jobbra mozog az éterhez képest, ahogy ezt az ábra mutatja. Határozzuk meg, hogy így mennyi ideig tart az egyes irányokba haladó

fénysugarak útja a lemezen való szétválástól az ugyanoda való visszaérkezésig (a többi szakaszon a két sugár együtt halad, ott fáziskülönbség nem lép fel). A lemeztől a  $B$  tükör felé vezető szakaszon a tükör a fényvel párhuzamosan halad, relatív sebességük tehát  $c - v$ , ennek a szakasznak a megtételéhez tehát  $t_1 = L/(c - v)$  idő kell; a visszaúton, mivel a lemez és a fény egymással szembe halad,  $t_2 = L/(c + v)$  idő telik el; a  $B$  tükörről visszaérkező fény tehát  $t_B = L \left( \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = L \frac{2c}{c^2 - v^2}$  ideig van úton.

Most kiszámítjuk, hogy mennyi idő alatt ér a fénysugár az  $A$  tükörhöz. Legyen ez az időtartam  $t_3$ : ezalatt a tükör az éterhez rögzített vonatkoztatási rendszerben  $vt_3$  utat tesz meg,  $L$ -re merőlegesen; a fény által „átlósan” befutandó út  $\sqrt{L^2 + v^2 t_3^2}$ , ami nyilvánvalóan  $ct_3$ -mal egyezik meg:  $c^2 t_3^2 = L^2 + v^2 t_3^2$ ; ebből  $t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$  adódik, így a  $A$  tükörből visszaérkező fény  $t_A = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$  ideig van úton, ami láthatóan nem egyenlő  $t_B$ -vel. A két időtartam aránya  $\frac{t_B}{t_A} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

A Föld keringési sebessége kb. 30 km/s, emiatt az év valamely részében az „éter-szélnek” is legalább ilyen gyorsnak kell lennie: az ekkora sebességű mozgás okozta effektus már a XIX. századi technikai feltételek mellett is kimutatható lett volna. A kísérlet azonban negatív eredménnyel zárult: *nem sikerült kimutatni az éterhez viszonyított mozgást.*

### 2.1.3. A kísérlet értelmezése: a Lorentz-kontrakció és -dilatáció

A kísérlet értelmezésére számos próbát tettek a kor fizikusai. Ezen elképzelések közül az egyik legfurcsább *Hendrik Lorentz (1853–1928)* nevéhez fűződik: szerinte a kísérlet magyarázata az, hogy a mozgó eszköz mozgásirányba mutató távolságai, hosszúságai (ez esetben a lemez és a  $B$  tükör távolsága) megrövidülnek más (pl. az „éterhez” rögzített) vonatkoztatási rendszerekből nézve, mégpedig  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ -szeresükre:

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.2)$$

így  $t_B$  éppen meg fog egyezni  $t_A$ -val. (Szimmetriaokokból a mozgásra merőleges hosszúságok nem változhatnak meg.)

Ez az elképzelés a kor fizikusainak szemében rendkívül furcsa volt, kezdetben nem akarták elfogadni. A *Lorentz-kontrakció* segítségével azonban valamennyi egyéb, az éterszél mérésére irányuló, negatív eredményt hozó kísérlet is magyarázható volt, szemben a többi, csak néhány kísérletre alkalmazható magyarázattal. Ez hozta meg a Lorentz-kontrakció létezésének elfogadását.

A Lorentz-kontrakció azonban megszünteti az éter kitüntetett vonatkoztatási rendszerét: a fény terjedési sebessége minden vonatkoztatási rendszerben  $c$  kell legyen. A *fénysebesség abszolút volta* a relativitáselmélet egyik legfontosabb alapvetése. A kitüntetett vonatkoztatási rendszer eltűnésével a relativitás elvét is rehabilitáltuk: ismét feltesszük, hogy *nincs abszolút vonatkoztatási rendszer.*

Most egy újabb eszközzel ismerkedünk meg: ez a *fényóra*, a legegyszerűbb időmérő. A fényóra egy ismert hosszúságú rúdból (méterrúd) áll, két végén egy-egy ideális

tükörrel: a két tükör között egy fényjel halad ide-oda, az óra minden visszaverődésnél jelet ad, ezekkel a jelekkel mérjük az időt. Egy álló,  $L$  hosszú fényóra nyilvánvalóan  $t = \frac{L}{c}$  időközönként ad jelet. Most gyorsítsuk a fényórát  $v$  sebességre, a rúdra merőlegesen (ekkor ugyanis a Lorentz-kontrakció hatása nem jelenik meg): az órával együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben a jelek periódusa továbbra is  $t$  marad; a nyugvónak kinevezett rendszerben legyen a periódus  $t'$ . Ekkor onnan szemlélve, a fény  $ct'$  utat tesz meg két tükör között, miközben azok  $vt'$ -vel mozdulnak el. A Michelson–Morley-kísélet elemzésénél látott gondolathoz hasonlóan  $L^2 + v^2t'^2 = c^2t'^2$ , ebből  $t' = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ , ami  $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ -szer több, mint  $t$ . A fényóra járása tehát lelassul, ha hozzá képest mozgó rendszerből nézzük: ebből a relativitás elve miatt az következik, hogy minden jelenség lefolyása lelassul mozgó koordinátarendszerben (különben az eltérésből meghatározható lenne az abszolút sebesség), tehát *mozgó koordinátarendszerből nézve az időtartamok megnőnek*:

$$t' = t \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.3)$$

Ez a *Lorentz-dilatáció*.

## 2.1.4. Feladatok

### 1. feladat.

Mit tapasztalnánk, ha a fent leírt fényórát a rúd hosszirányában kezdenénk el gyorsítani?

### 2. feladat.

A Föld felső légkörében, kb. 5 km magasságban nagy számban keletkeznek müonok a kozmikus sugárzás következtében. E müonok átlagos sebessége  $0,995c$ , élettartamuk kb.  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s. A két adatból az következik, hogy a müonoknak kb. 650 méter megtétele után el kellene bomlaniuk, így a Földön már csak elhanyagolható mennyiségben lehetne őket észlelni. Ezzel szemben nagy számban figyelhetőek meg kozmikus eredetű müonok a Föld felszínén is. Hogyan lehetséges ez? (Két lényegesen különböző magyarázat is adható.)

### 3. feladat.

Egy 100 m hosszú űrhajó egy földi megfigyelő előtt  $0,2 \mu\text{s}$  alatt halad el (azaz ennyi idő telik el a Földről nézve, amíg az űrhajó végighalad egy adott ponton). Mekkora az űrhajó sebessége?

### 4. feladat.

Egy rakéta  $v$  sebességgel halad a Föld felé, eközben  $c$  sebességgel haladó fényjelet bocsát ki. Milyen gyorsnak látja a fényjelet a Földön álló megfigyelő?

### 5. feladat.

Egy bizonyos baktériumfaj 20 nap alatt osztódik (azaz 20 nap alatt minden baktériumból kettő lesz). Két ilyen baktériumot egy űrhajóba teszünk, majd az űrhajót (a Földről nézve) 1000 napos útra küldjük: az űrhajó sebessége az utazás során végig  $v = 0,995c$ . Hány baktérium lesz az űrhajón a visszaérkezéskor?

## 2.2. Relativisztikus kinematika

### 2.2.1. Lorentz-transzformáció

A Lorentz-kontrakcióból és -dilatációból levezethető, hogy a Galilei-transzformáció helyett két, egymáshoz képest  $v$  sebességgel mozgó koordináta-rendszer kapcsolatát a következő egyenletek írják le:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.4)$$

ahol az egyes mennyiségek jelentése ugyanaz, mint a Galilei-transzformáció egyenleteiben. Ezeket a transzformációs képleteket is Lorentz írta fel először, ezért azt *Lorentz-transzformációnak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy a Lorentz-transzformáció egyenleteit a Maxwell-egyenletekbe helyettesítve, azok alakja nem változik, tehát *az elektrodinamika Lorentz-invariáns*.

### 2.2.2. A sebességek transzformációja

A klasszikus mechanikában megszoktuk, hogy ha a  $K$  koordináta-rendszerhez képest  $+x$  irányba  $u$  sebességgel mozgó  $K'$  koordináta-rendszerben egy test sebessége  $x$ -irányú és  $v'_x$  nagyságú, akkor  $K$ -ban a sebesség  $v_x = u + v'_x$  lesz; az  $y$ -irányú sebességek pedig nem függenek a koordináta-rendszerétől. Vizsgáljuk meg a sebességek összegződését a relativisztikus mechanika szemszögéből.

Mozogjon tehát egy test  $v'_x$  sebességgel a  $K'$  koordináta-rendszerben az  $x$  irányba: ekkor helyzete az idő függvényében  $x' = v'_x t'$  alakban adható meg (a kezdőhelyezettel fölösleges lenne foglalkozni). A  $K'$  rendszerből a hozzá képest  $-u$ -val mozgó  $K$  rendszerbe átvivő Lorentz-transzformáció a következő:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

ebbe behelyettesítve  $x' = v'_x t'$ -t,  $x$ -re és  $t$ -re a következő adódik:

$$x = \frac{v'_x + u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} t'; \quad t = \frac{1 + uv'_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} t',$$

innen az origó kezdőpontú, egyenes vonalú egyenletes mozgás sebessége:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v'_x}{1 + uv'_x/c^2}. \quad (2.5)$$

Láthatjuk, hogy az eredő sebesség a két sebességnek nem egyszerű algebrai összege, hanem azok *összegzettje*.

A relativitáselmélet szerint nem csak a mozgásirányú sebesség változik meg, hanem az arra merőleges komponens is. Mozogjon ugyanis a test  $v'_y$  sebességgel az  $y$  irányba:

ekkor a  $K'$  rendszerben  $y' = v'_y t'$  teljesül. Igaz, hogy  $y = y'$  lesz, de az idődilatáció miatt  $t = \frac{t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ , így

$$v_y = \frac{y}{t} = v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (2.6)$$

**Megjegyzés.** Ha  $v'_x = c$ , azaz a mozgó test fénysebességgel mozog, sebessége az  $u$  sebességgel mozgó koordinátarendszerben is  $v_x = \frac{u+c}{1+uc/c^2} = c$ , a fénysebesség tehát valóban nem függ a vonatkoztatási rendszertől. A rendszer felépítésénél ezt alapfeltevésként kezeltük, teljesülésének levezetése ezért megnyugtató.

### 2.2.3. Az ikerparadoxon

A relativitáselmélet számos zavarba ejtő következménye közül az egyik legnevezetesebb az *ikerparadoxon*. Adott egy ikerpár, *András* és *Béla*. András végig a (jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető) Földön marad, míg Béla egy nagysebességű (közel fénysebességgel haladó) űrhajóval elhagyja bolygónkat, eltávolodik, majd visszatér. Amikor Béla kilép az űrhajóból, azt tapasztalja, hogy a Földön sokkal hosszabb idő telt el, mint az űrhajón; ikertestvére, akivel az utazás előtt egyidősek voltak, jóval idősebb nála. Ennek oka az, hogy a Földhöz rögzített inerciarendszerben az András által átélt  $t$  időtartam a Lorentz-dilatáció értelmében Béla  $v$  sebességével mozgó rendszerében csak  $t' = t\sqrt{1-v^2/c^2} < t$  időtartamnak felel meg, így Béla sajátideje kisebb mértékben nő az utazás közben, mint Andrásé.

A paradoxon abban áll, hogy a relativitási elv értelmében mondhatnánk azt is, hogy Béla áll az űrhajóval, és hozzá képest a Föld távolodik el, ezért a szimmetria miatt az újbóli találkozásnál egyidőseknek kellene lenniük. *Ez az érvelés azonban hamis!* A relativitási elv csak két inerciarendszer között érvényes, Béla vonatkoztatási rendszere azonban nem az: a Földről való elindulásnál, a visszafordulásnál és a megállásnál Béla gyorsulást él meg, tehát sorsa nem azonos Andráséval: ez az aszimmetria magyarázza meg a látszólagos ellentmondást.

Tévedés lenne azonban azt hinni, hogy a gyorsulás *okozza* a jelenséget. Tekintsük a következő, hasonló kísérletet: András és Béla két űrhajón indulnak el a Földről: a Marsig együtt haladnak, ott András lefékez és megáll a vörös bolygón, Béla pedig tovább halad a Szíriusz felé. Amikor Béla megérkezik a csillaghoz, megáll, majd egy pillanatnyi állás után visszaindul a Naprendszer felé. Amikor a Marshoz ér, András is elindul onnan, majd egyszerre érkeznek meg a Földre. András ebben az esetben is idősebb lesz, mint Béla, bár *ugyanolyan gyorsulásokat élt át*, mint „öccse”. Az ikrek között kialakuló korkülönbség tehát nem a gyorsulás, hanem az inerciarendszerekhez képest eltérően görbülő *világvonal* következménye (világvonalnak a testek által a téridőben befutott pályát nevezzük).

### 2.2.4. Feladatok

#### 1. feladat.

Az ikerparadoxon első változatát teszteljük kísérletileg. András a Földön marad, míg Béla  $v$  sebességgel elhagyja a Földet, elmegy egy csillaghoz, majd onnan ugyancsak  $v$  sebességgel tér vissza (a gyorsítási és lassítási szakaszokat nagyon rövidnek tekintjük). Kezdetben mindketten pontosan 20 évesek. Amikor Béla visszatér, ő 23, András pedig 60 éves lesz.

- Milyen gyorsan haladt az űrhajó?
- Milyen távol van a csillag a Földtől?
- Milyen hosszúnak érzékelt Béla az utat?

#### 2. feladat.

Egy „ kozmikus folyó ”  $u = 1/2$  fénysebességgel folyik, rajta csónakok közlekednek, a folyóhoz képest  $v = 2/3$  fénysebességgel.

- Mekkora a felfelé és a lefelé haladó csónakok sebessége a partról nézve?  
A folyó partján két város,  $A$  és  $B$  áll, egymástól  $2,7 \cdot 10^6$  km-re (a partról nézve),  $B$  a folyásirány szerint lejjebb van. A partról nézve egyidőben elindul egy-egy csónak a másik város felé.
- A partról nézve hol és mennyi idő után találkoznak egymással a csónakok?
- Mennyi ideig eveznek – a saját órájuk szerint – a csónakosok a találkozásig?

#### 3. feladat.

Az  $A$  és  $B$  rakéták egy egyenesen mozognak: az  $A$  űrhajó  $0,8c$  sebességgel balra, a  $B$  űrhajó pedig  $0,6c$  sebességgel jobbra távolodik a Földtől. Mekkora sebességűnek látszik az  $A$  űrhajó a  $B$  űrhajóból nézve?

#### 4. feladat.

Két test egy egyenes mentén ellentétes irányban halad, a Földhöz viszonyított sebességük azonos. Mekkora ez a sebesség, ha egymáshoz viszonyított sebességüket a Lorentz-transzformáció helyett a Galilei-transzformációval számolva 2%-os relatív hibát követünk el?

#### 5. feladat.

András és Béla ikerk, akik a Földön élnek. András 20 évesen egy  $v = 10^5$  km/s sebességű űrhajóval elindul egy adott irányba. Amikor Béla 30 éves lesz, ugyanebbe az irányba indul el  $w = 1,8 \cdot 10^5$  km/s sebességgel.

- A Földről nézve mikor és milyen távol találkoznak az ikerk?
- <sup>†</sup> Az ikerpár melyik tagja lesz fiatalabb, amikor találkoznak? (Próbáljunk számolás nélkül válaszolni!)
- Mennyi ideig utaztak és mekkora utat tettek meg (saját műszereik szerint) a találkozásig?

## 2.3. Relativisztikus dinamika

Az előzőekben megállapítottuk, hogy az inerciarendszerek közötti helyes koordinátatranszformáció nem a Galilei-, hanem a Lorentz-transzformáció. A relativitás elve értelmében tehát minden fizikai jelenségnek Lorentz-invariánsnak kell lennie. A *newtoni dinamika azonban nem ilyen*, ezért azt a relativitáselmélet megalkotása során



felül kellett vizsgálni: ennek legfontosabb elemeivel foglalkozunk ebben a részben.

### 2.3.1. A tömeg és az energia ekvivalenciája

Az elektromágneses mező töltött testeken munkát tud végezni, illetve meg is tudja változtatni azok lendületét, ezért azt mondhatjuk, hogy az elektromágneses térnek energiája és lendülete van. Most kiszámítjuk ezek nagyságának az arányát.

Tekintsünk egy olyan töltött részecskét, amelynek sebessége az elektromos térrel éppen párhuzamos, nagysága pedig  $v$ . Ezen a részecskén  $\Delta t$  idő alatt az elektromos tér  $\Delta W = F_e \cdot \Delta s = eE \cdot v\Delta t$  munkát végez, az  $F_m = evB$  nagyságú mágneses Lorentz-erő pedig  $\Delta p = F_m \Delta t = eB \cdot v\Delta t$ -vel növeli a részecske hullámterjedés irányába eső lendületét (figyelembe véve, hogy az elektromágneses hullámokban  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , azt találjuk, hogy a mágneses Lorentz-erő éppen a hullámterjedés irányába mutat). Ezt az átadott energiát és lendületet előtte az elektromágneses hullám hordozta.

Az átadott lendület és energia hányadosa

$$\frac{\Delta p}{\Delta W} = \frac{eBv\Delta t}{eEv\Delta t} = \frac{B}{E} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c},$$

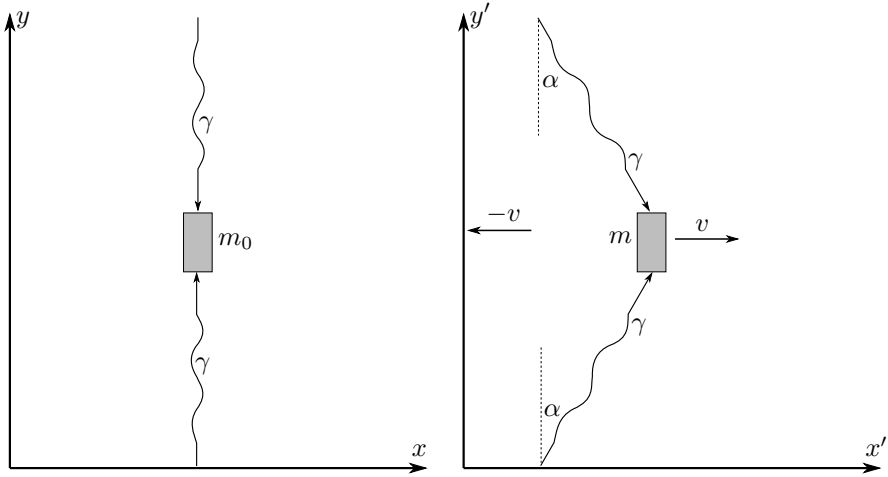
a részecske és a hullám tulajdonságaitól függetlenül (a Maxwell-egyenletekből levezethető, hogy tetszőleges elektromágneses hullámban a mágneses indukcióra és az elektromos térerősségre  $E = Bc$  fennáll).

Képzeljük el, hogy több részecske együttesen elnyeli a sugárzást: ekkor az elektromágneses mező energiájának és lendületének is 0-ra kell csökkennie, de mivel mindig a lendületnek pontosan  $c$ -szerese adható le energiaként, ennek az aránynak kezdetben is fenn kellett állnia. Az elektromágneses mező energiája és lendülete között tehát az  $E = pc$  összefüggés áll fenn.

Az elektromágneses mezőnek lendülete van, tehát tömege is kell legyen, a lendület ugyanis a mozgó tömeg jellemzője: a tömeget a továbbiakban, mint a lendület és a sebesség hányadosát fogjuk definiálni. Mivel a fény  $c$  sebességgel terjed, lendülete e definíció szerint  $p = mc$ , ahol  $m$  az elektromágneses mező tömege. Ezt felhasználva, az elektromágneses mező energiája és tömege között felírhatjuk az  $E = mc^2$  összefüggést.

Most megmutatjuk, hogy ez az összefüggés nem csak az elektromágneses anyagra, hanem *minden anyagfajtára* érvényes. Ehhez képzeljünk el egy adott koordinátarendszerben nyugvó,  $m_0$  tömegű anyagdarabot, amelybe  $+y$  és  $-y$  irányú, azonos energiájú fotonok érkeznek, amelyeket az el is nyel (l. 2.2. ábra). Mivel a fotonok lendülete azonos nagyságú (a fentiek értelmében), de ellentétes irányú, a test lendülete nem változik meg, tehát nyugalomban marad, mozgásállapota nem változik.

Vizsgáljuk ugyanezt a folyamatot egy, a testhez képest  $v$ -vel  $-x$  irányba mozgó rendszerből: legyen ebben a rendszerben a fotonok energiája  $E$ , a test tömege pedig  $m$ . Innen nézve, a testnek  $v$  sebessége van  $+x$  irányban, illetve a fotonok már nem az  $y$  tengellyel párhuzamosan, hanem azzal  $\alpha$  szöget bezárva haladnak: mivel sebességük vízszintes komponense nyilván  $v$ ,  $\sin \alpha = \frac{v}{c}$  teljesül, lendületüknek tehát lesz  $p_x = p \sin \alpha = \frac{E}{c} \frac{v}{c}$  nagyságú,  $+x$  irányú komponense is. Ha a test elnyeli a fotonokat, mozgásállapota nem változik, sebessége  $v$  marad, azonban felvesz  $\Delta p = 2p_x = \frac{2Ev}{c^2}$

2.2. ábra.  $E = mc^2$ 

lendületet. Mivel a lendületet  $p = mv$ -ként értelmezzük, az állandó sebesség melletti lendületnövekedés tömegnövekedést jelent, ami  $\Delta m = \frac{\Delta p}{v} = \frac{2E}{c^2}$ ; másrészt a test energiája a fotonok elnyelése miatt  $2E$ -vel megnő. A test tömegnövekedésének  $c^2$ -szerese tehát éppen az energia növekedését adja meg: ebből, mivel egy nulla tömegű testnek nem tulajdonítunk energiát, következik, hogy bármilyen anyagra  $E = mc^2$  teljesül.

Összefoglalva: *bármilyen anyag energiája tömegének  $c^2$ -szeresével egyezik meg. Ez a tömeg és az energia ekvivalenciája.*

### 2.3.2. Relativisztikus tömegnövekedés

A mozgó testek mozgásállapotuk miatt munkavégzésre képesek, tehát mozgási energiájuk van: ez a tömeg és az energia ekvivalenciája miatt azt jelenti, hogy a mozgó testek tömege megnövekszik. Most ezt a tömegnövekedést számítjuk ki.

Tekintsünk egy nyugalomban  $m_0$  tömegű testet, ezt kezdjük el gyorsítani. Tekintsük azt az állapotot, amikor a test  $v$  sebességgel mozog. Ha ekkor a testre rövid  $\Delta t$  ideig  $F$  erőt fejtünk ki, az a test lendületét  $\Delta p = F\Delta t$ -vel növeli meg, másrészt  $W = F\Delta s = Fv\Delta t$  munkát végez rajta, azaz mozgási energiáját ennyivel növeli meg:  $\Delta E = Fv\Delta t = v\Delta p$ . A test lendület- és energiaváltozásának hányadosa tehát  $v$ .

Tudjuk, hogy  $p = mv$  és  $E = mc^2$ , amelyek kis megváltozásai  $\Delta m$ -mel és  $\Delta v$ -vel így fejezhetőek ki:  $\Delta p = v\Delta m + m\Delta v$ ,  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ . A lendület és az energia megváltozása közötti kapcsolatot figyelembe véve:

$$v^2\Delta m + mv\Delta v = \Delta mc^2$$

$$\Delta v \cdot mv = \Delta m(c^2 - v^2)$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{v \Delta v}{c^2 - v^2}.$$

Mivel ez az összefüggés a gyorsítás minden szakaszára fennáll, ezeket az egyenleteket összegezhettük; az összegzés a felosztás finomításával integrálásba megy át:

$$\int_{m=m_0}^{m(V)} \frac{dm}{m} = \int_{v=0}^V \frac{v dv}{c^2 - v^2}.$$

A két oldalon szereplő határozott integrálokat kiszámíthatjuk:

$$\ln \frac{m(V)}{m_0} = -\frac{1}{2} \ln \frac{c^2 - V^2}{c^2 - 0^2} = \ln \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - V^2}}$$

Mivel a természetes logaritmus szigorúan monoton növekvő függvény,

$$\frac{m(V)}{m_0} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} : \quad (2.7)$$

ez a *relativisztikus tömegnövekedés* képlete.

**Megjegyzés.** A fentiek szerint a mozgó testek tömege nagyobb, mint ha azok nyugalomban lennének. Az a tény azonban, hogy a mozgó testek tovább gyorsítása nehezebb (nagyobb erőt igényel), mint a nyugvóké, máshogy (pl. a Lorentz-kontrakció és -dilatáció figyelembe vételével) is magyarázható, emiatt nem jogos a 2.7. egyenlet szerinti kifejezést a test tényleges tömegének nevezni. Másrészt a tömeget általában, mint egy test vagy mező jellemzőjét definiáljuk, ami nem függhet a vonatkoztatási rendszer választásától. Emiatt a 2.7. egyenlet által adott kifejezést a test *látszólagos tömegének* nevezzük, a *tömeg* elnevezést a nyugvó test tömegének fenntartva. A problémáról részletesebben olvashatunk pl. *Hraskó Péter A relativitáselmélet alapjai* című könyvében; itt az eddig ismertetteknel némileg bonyolultabb, azonban a látszólagos tömegre nem hivatkozó levezetések is olvashatók a relativisztikus dinamika alapösszefüggéseire.

### 2.3.3. Relativisztikus mozgási energia és lendület

Mivel egy  $v$  sebességgel mozgó test látszólagos tömege  $m(v) = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , azért lendülete

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.8)$$

teljes energiája pedig

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.9)$$

**Megjegyzés.** A teljes energiából  $E_0 = m_0c^2$  az ún. *nyugalmi energia*, így a mozgásnak ténylegesen

$$E_m = E - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$$

energiajárulék tulajdonítható. A relativisztikus számításokban azonban a *mozgási energia* külön kezelése inkább csak nehezíti a számításokat, helyette a teljes energiával célszerűbb számolni.

A speciális relativitáselméletben a pontszerű testek mozgásegyenlete a lendülettétel, a lendület relativisztikus definíciójával:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} \quad (2.10)$$

Belátható, hogy a Newton-egyenlet helyettesítése a 2.10. egyenlettel a dinamikát Lorentz-invariánssá teszi.

### 2.3.4. Az energia és a lendület Lorentz-transzformációja, négyesimpulzus, tömeghég-feltétel

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért olyan egységrendszert választunk, amiben  $c = 1$ : ez gyakran használt egyszerűsítés relativitáselméleti számításoknál. Mozogjon egy test  $v$  sebességgel a  $K$  koordináta-rendszerben  $x$ -irányban. Ekkor lendülete az  $x$  irányba  $p_x = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2}}$ , energiája pedig  $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ . Most vizsgáljuk ugyanezt a testet egy  $K$ -hoz képest  $u$  sebességgel a  $+x$  irányba haladó  $K'$  rendszerből. Innen nézve a test sebessége (2.5) szerint  $v' = \frac{v-u}{1-uv}$ , tehát energiája

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2-2vu+u^2}{1-2uv+u^2v^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{1+u^2v^2-v^2-u^2}{(1-uv)^2}}} = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} = \\ &= \frac{(m_0/\sqrt{1-v^2}) - (m_0v/\sqrt{1-v^2})u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ tehát} \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A tömeg és az energia ekvivalenciája értelmében

$$\begin{aligned} p'_x &= E'v' = \frac{m_0(1-uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{v-u}{1-uv} = \frac{m_0v - m_0u}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{p_x - Eu}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ azaz} \\ p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.7) és (2.6) alapján könnyen látható, hogy ha egy  $y$  irányba mozgó testet vizsgálunk a két rendszerben, a tömegnövekedés és a sebességcsökkenés együttes hatása

miatt  $p'_y = p_y$ , és nyilván  $p'_z = p_z$ . A fentieket összefoglalva, a két különböző rendszerben mért lendület- és energiaértékeket egymásba átvivő transzformáció:

$$p'_x = \frac{p_x - uE/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z; \quad E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (2.13)$$

Vegyük észre, hogy ez a transzformáció lényegében megegyezik a hely- és időkoordinátákat egymásba átvivő (2.4) képletekkel, a Lorentz-transzformációval. Ezért azt mondjuk, hogy *az energia és a lendület Lorentz-transzformáció szerint átalakul egymásba és az  $(E; \mathbf{p})$  négydimenziós mennyiséget négyesimpulzusnak vagy energia-impulzus négyesvektornak nevezzük.*

### Megjegyzések.

1. Számos olyan, háromdimenziós vektormennyiség létezik, amely mellé található olyan negyedik, „időszerű” komponens, amellyel a vektor komponensei Lorentz-transzformáció szerint kapcsolódnak össze (ilyen például az energia és a lendületvektor kapcsolata). Ezeket az együtt négydimenziós mennyiségeket nevezzük *négyesvektoroknak*. A relativitáselmélet és a Lorentz-transzformáció szemszögéből nézve sem az időszerű, sem a térszerű komponensek nem hordoznak tényleges fizikai tartalmat (hiszen ezek függnek a koordinátarendszertől), csak a teljes négyesvektor (hasonló a helyzet a háromdimenziós vektorok és komponenseik közti különbséghez).
2. A négyesvektorokkal a háromdimenziós vektorokhoz hasonlóan lehet számolni: értelmezzük egy négyesvektor hosszát és négyzetét, két négyesvektor skalárszorzatát, ...; ennek módszereivel most nem foglalkozunk részletesen.

Egy négyesvektor négyzetén az időszerű komponens négyzetének és a térszerű komponens (vektori) négyzetének különbségét értjük: a négyesvektorok egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy négyzetük a koordinátarendszertől függetlenül állandó (ezt a Lorentz-transzformáció segítségével bizonyíthatjuk). A négyesimpulzus négyzete:  $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2$ ; ez az eddigiek szerint állandó, így megegyezik a nyugvó részecskére kiszámolt értékkel, ami  $(m_0 c^2)^2 - 0^2 c^2 = m_0^2 c^4$ , tehát  $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$ , vagy átrendezve:

$$(m_0 c^2)^2 + (pc)^2 = E^2. \quad (2.14)$$

Ezt az összefüggést nevezzük *tömeghég-feltételnek*.

### Megjegyzések.

1. A tömeghég-feltétellel való számolás az esetek többségében (a megmaradási törvények jobb kihasználhatósága miatt) sokkal egyszerűbb és kényelmesebb, mint a 2.8. és 2.9. egyenletek alkalmazása.
2. Egy fotonra, mivel nincs nyugalmi tömege, a tömeghég-feltétel a következő, egyszerűbb alakot ölti:  $E = pc$ .

## 2.3.5. Relativisztikus Doppler-effektus

A klasszikus fizikában is ismert jelenség, hogy a hullámok véges terjedési sebessége miatt egy forrásból kibocsátott hullámok frekvenciája nem egyezik meg a megfigyelő által észlelt frekvenciával, ha azok mozognak egymáshoz képest. Doppler eredetileg

hanghullámokat vizsgált, amelyek a levegőben, mint közegben terjednek, ezért a frekvencia megváltozása nem csak a forrás és a megfigyelő relatív sebességétől, hanem azok közeghez viszonyított sebességétől is függ.

A fény frekvenciája is megváltozik a Doppler-effektus következtében, itt azonban, mivel a fénynek nincs közvetítő közege, máshogy kell eljárunk, mint a hanghullámok esetében. Legyen a forrás frekvenciája  $f$ : tekintsünk egy fotont, amelynek energiája  $E = hf$  a forrás  $K$  koordinátarendszerében, és a  $+x$  irányba halad: ekkor a foton lendülete  $p_x = \frac{hf}{c}$ . Most vizsgáljuk a fotont a megfigyelő  $K'$  koordinátarendszerében, amely az  $x$  irányban  $v$  sebességgel mozog  $K$ -hoz képest: a geometria alapján könnyen meggondolható, hogy  $v$  akkor pozitív, ha a megfigyelő távolodik a forrástól. Ekkor (2.13) alapján a foton energiája a megfigyelő rendszerében:

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{hf - v \cdot hf/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = hf \frac{1 - v/c}{\sqrt{(1 - v/c)(1 + v/c)}} = hf \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}};$$

mivel ez az energia a megfigyelő által észlelt foton  $hf'$  energiája, az észlelt frekvencia:

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (2.15)$$

Ez a relativisztikus Doppler-effektus képlete.

A képletből kiolvasható, hogy távolodó fényforrás esetén az észlelt frekvencia kisebb, közeledő esetén nagyobb, mint a ténylegesen kibocsátott frekvencia. Mivel a kozmikus fényforrások (más galaxisok) távolodnak tőlünk, a távoli galaxisokból érkező fény frekvenciája lecsökken, hullámhossza megnő, így a színek jellegzetes vonalai a színek magas hullámhosszú (vörös) vége felé tolódnak: ez a *vörösetolódás*.

### 2.3.6. Feladatok

#### 1. feladat.

Egy  $m_0$  nyugalmi tömegű testet felgyorsítunk  $v = 0,8 c$ -re, majd rugalmatlanul neki-ütköztetjük egy ugyanilyen, de nyugvó testnek. Mekkora lesz a keletkező test nyugalmi tömege és sebessége?

#### †2. feladat.

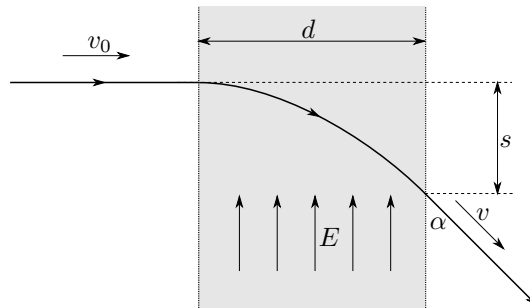
A müon egy  $-e$  töltésű,  $m_\mu = 207m_e$  nyugalmi tömegű elemi részecske, amely  $t = 2,2 \cdot 10^{-6}$  s átlagos élettartammal  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$  szerint elbomlik. Müonokat állítunk elő, majd  $B = 2$  T erősségű mágneses térben  $r = 1,239$  m sugarú körpályára állítjuk őket. A kirepülő neutrínók és antineutrínók segítségével meghatározzuk a keringő müonok élettartamát. Mekkora lesz a mért élettartam?

#### 3. feladat.

A pion az elektronnál 273-szor nagyobb nyugalmi tömegű elemi részecske, amely egyik bomlási folyamata során pozitronra és neutrínóra bomlik:  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ .

(a) Mekkora lesz egy nyugvó pion bomlásával létrejövő pozitron és neutrínó lendülete és energiája?

(b)‡ Legalább mekkora kell legyen a pion sebessége ahhoz, hogy a keletkező pozitron



2.3. ábra. Az 5. feladathoz.

és neutrínó merőlegesen repüljön szét?  
(A neutrínó nyugalmi tömegét tekintjük nullának.)

#### ‡4. feladat.

Egy pozitront elektromos térrel úgy gyorsítunk fel, hogy mozgási energiája a nyugalmi  $k$ -szorososa legyen, majd nekiütköztetjük egy elektronnak. A két részecske  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$  szerint két fotonra bomlik el. Legalább mekkora a két foton haladási iránya által bezárt  $\alpha$  szög? Fejezzük ki  $\alpha$  minimumát  $k$  függvényében.

#### 5. feladat.

Egy elektront vízszintesen a fénysebesség 60 %-ára gyorsítunk, majd merőlegesen egy  $d = 20$  cm széles függőleges sávba vezetjük, ahol függőleges,  $E = 1,09 \cdot 10^6$  V/m erősségű elektromos tér található. Az elektron az erővonalakkal  $\alpha = 45^\circ$ -os szöget bezárva hagyja el a térrészt.

- Mekkora az elektron sebessége, amikor kilép a térrészből?
- Mekkora az elektron által függőlegesen befutott  $s$  út?

#### 6. feladat.

Ha két protont elég nagy energiával ütköztetünk össze,  $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^- + p^+$  szerint *antiproton* keletkezik. Mekkora energiájú proton szükséges antiprotonkeltéshez, ha

- ‡ egy mozgó protont egy állónak ütköztetünk;
- két azonos energiájú protont szemből ütköztetünk össze?

#### ‡7. feladat.

Ha elég nagy energiájú foton álló elektronnak ütközik,  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + e^+ + e^-$  szerint pozitron keletkezik. Mekkora energiájú fotonra van ehhez szükség?

#### 8. feladat.

Egy galaxis fényében a nátrium  $D_1$ -vonal hullámhosszát 1021,205 nm-nek mértük.

- Mekkora sebességgel távolodik a galaxis tőlünk?
- Mennyinek mérnénk a hullámhosszat egy, a Földhöz képest  $c/3$  sebességgel a galaxis irányába haladó űrhajóból?

## 3. fejezet

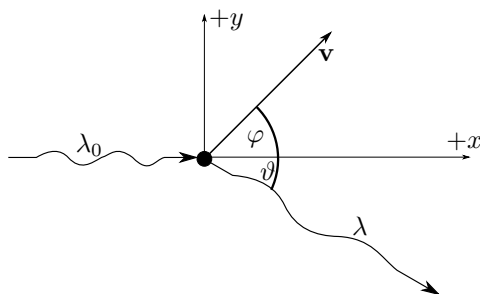
# A kvantumelmélet alkalmazásai

### 3.1. Compton-szórás

A Compton-effektus egy újabb bizonyíték a fény részecske természete mellett: a jelenség során az elektromágneses sugárzás szóródik (rugalmasan lepattan) szabad, vagy kevésbé kötött elektronokon. A jelenséget először *Arthur Compton* amerikai fizikus figyelte meg 1923-ban. A szóródás közben a foton energiája fedezi az elektron mozgási energiáját, így az csökken, a hullámhossz nő. A vizsgálathoz használt rendszert a 3.1. ábra mutatja.

#### 3.1.1. Elméleti vizsgálat

Két módon is megvizsgáljuk a jelenséget:



3.1. ábra. Compton-szórás



**Nemrelativisztikus megoldás**

A megoldáshoz klasszikus fizikai módszereket és matematikai közelítést alkalmazunk.

A jelenség tökéletesen rugalmas ütközésnek tekinthető, így lendület- és energia-megmaradási törvényeket kell felírni:

$$E: \quad \varepsilon_{f_0} = \varepsilon_f + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

$$p_y: \quad 0 = mv \sin \varphi - \frac{\varepsilon_f}{c} \sin \vartheta \quad (3.2)$$

$$p_x: \quad \frac{\varepsilon_{f_0}}{c} = mv \cos \varphi + \frac{\varepsilon_f}{c} \cos \vartheta \quad (3.3)$$

(3.2)-ből:

$$\sin \varphi = \frac{\varepsilon_f}{cmv} \sin \vartheta \quad (3.4)$$

Kihasználva, hogy  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  minden szögre, így (3.3) a következővé alakul:

$$\frac{\varepsilon_{f_0}}{c} = mv \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_f^2}{c^2 m^2 v^2} \sin^2 \vartheta} + \frac{\varepsilon_f}{c} \cos \vartheta$$

$$\varepsilon_{f_0} = \sqrt{m^2 v^2 c^2 - \varepsilon_f^2 \sin^2 \vartheta} + \varepsilon_f \cos \vartheta$$

$$(\varepsilon_{f_0} - \varepsilon_f \cos \vartheta)^2 = \left( \sqrt{m^2 v^2 c^2 - \varepsilon_f^2 \sin^2 \vartheta} \right)^2$$

$$\varepsilon_{f_0}^2 + \varepsilon_f^2 - 2\varepsilon_{f_0}\varepsilon_f \cos \vartheta = m^2 v^2 c^2$$

Felhasználva (3.1)-t:

$$\varepsilon_{f_0}^2 + \varepsilon_f^2 - 2\varepsilon_{f_0}\varepsilon_f \cos \vartheta = 2mc^2(\varepsilon_{f_0} - \varepsilon_f)$$

Felhasználjuk a következő, kis energiakülönbség esetén érvényes közelítést:

$$\varepsilon_{f_0}^2 + \varepsilon_f^2 = 2\varepsilon_{f_0}\varepsilon_f.$$

$$2\varepsilon_{f_0}\varepsilon_f(1 - \cos \vartheta) = 2mc^2(\varepsilon_{f_0} - \varepsilon_f)$$

$$1 - \cos \vartheta = mc^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_f} - \frac{1}{\varepsilon_{f_0}} \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_f} = \frac{1 - \cos \vartheta}{mc^2} + \frac{1}{\varepsilon_{f_0}}$$

Ehhez a sorhoz még visszatérünk, most térjünk át a másik megoldási útra.

**Relativisztikus megoldás**

A lendületmegmaradás törvénye vektoralakban:

$$\mathbf{p}_{f_0} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_f \Rightarrow \mathbf{p}_e = \mathbf{p}_{f_0} - \mathbf{p}_f \quad (3.5)$$

Az egyenletet négyzetre emelve:

$$p_e^2 = p_{f_0}^2 + p_f^2 - 2p_f p_{f_0} \cos \vartheta$$

Az energiamegmaradás törvénye a részecskék teljes energiájára:

$$\varepsilon_{e_0} + \varepsilon_{f_0} = \varepsilon_e + \varepsilon_f$$

Kihhasználva, hogy egy részecske teljes energiája  $\varepsilon = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}$ :

$$m_0c^2 + p_{f_0}c = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (p_e c)^2} + p_f c \quad (3.6)$$

$$(m_0c^2 + (p_{f_0} - p_f)c)^2 = m_0^2c^4 + p_e^2c^2$$

A bal oldalon elvégezzük a négyzetreemelést, a jobb oldalba behelyettesítjük (3.5)-t:

$$m_0^2c^4 + p_{f_0}^2c^2 + p_f^2c^2 + 2m_0p_{f_0}c^3 - 2m_0p_f c^3 - 2p_{f_0}p_f c^2 =$$

$$= m_0^2c^4 + p_{f_0}^2c^2 + p_f^2c^2 - 2p_{f_0}p_f \cos \vartheta c^2$$

$$m_0c(p_{f_0} - p_f) = p_{f_0}p_f(1 - \cos \vartheta)$$

$$m_0c \left( \frac{1}{p_f} - \frac{1}{p_{f_0}} \right) = 1 - \cos \vartheta$$

$$\frac{1}{p_f} = \frac{1 - \cos \vartheta}{m_0c} + \frac{1}{p_{f_0}}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát  $c$ -vel és tekintsük, hogy  $\varepsilon_f = p_f c$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_f} = \frac{1 - \cos \vartheta}{mc^2} + \frac{1}{\varepsilon_{f_0}}$$

Ezt a sort kaptuk meg, amikor a klasszikus megoldást abbahagytuk, így most innen folytathatjuk a megoldást. Használjuk fel, hogy  $\varepsilon_f = hf$ :

$$\frac{1}{hf} = \frac{1 - \cos \vartheta}{mc^2} + \frac{1}{hf_0}$$

Szorozzunk  $hc$ -vel:

$$\frac{c}{f} = \frac{h(1 - \cos \vartheta)}{m_0c} + \frac{c}{f_0}$$

Kihhasználva, hogy  $\frac{c}{f} = \lambda$ , kapjuk a Compton-szórás alapegyenletét:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \vartheta) \quad (3.7)$$

A 3.7 egyenletben a  $\frac{h}{m_0c}$  mennyiséget *Compton-hullámhossznak* nevezzük, és  $\lambda_C$ -vel jelöljük.

### 3.1.2. Feladatok

**A feladatokkal kapcsolatban:** próbáljunk minél több feladatot a Compton-szórás alapegyenlete nélkül, pusztán a rugalmas ütközés egyenleteit felhasználva megoldani.

#### 1. feladat.

Compton-szórási kísérletben „nyugvó” elektronokat olyan fotonokkal bombázunk, amelyeknek energiája megegyezik az elektron nyugalmi energiájával. A szóródott fotonok lendülete ugyanakkora, mint a meglökött elektroné.

- Határozzuk meg a két lendületvektor által bezárt szöget.
- Mekkora lesz az elektron sebessége?

#### ‡2. feladat.

Mekkora lehet a hullámhosszváltozása annak a fotonnak, amely két nyugvó elektron egymás után, azonos síkban történő Compton-szóródás után az eredeti irányhoz képest derékszögben térül el?

#### 3. feladat.

Nyugvó elektronokat olyan fotonnalábbal ütköztetünk, amelyben a fotonok energiája egyenlő az elektronok nyugalmi energiájával. Számítsuk ki a „legjobban meglökött” elektronok ütközés utáni sebességét.

#### 4. feladat.

Egy  $\lambda = 50$  pm hullámhosszúságú röntgenfoton centrálisan ütközik egy szabad, nyugvó elektronnal. A foton az elektronnal  $180^\circ$ -os szögben pattan vissza.

- Mekkora lesz a visszapattant foton hullámhossza?
- Mekkora lesz a meglökött elektron sebessége? Az elektron tömegnövekedésétől tekintsünk el, de utólag azért ellenőrizzük ennek jogosságát.
- Mekkora hullámhosszúságú lehet a foton, ha a meglökött elektronnál legfeljebb 1,1-szeres tömegnövekedést engedhetünk meg?

#### 5. feladat.

Röntgenfotonok derékszögben szóródnak álló elektronokon. Mekkora a fotonok hullámhosszváltozása?

#### 6. feladat.

Egy  $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-16}$  J energiájú foton ütközik egy nyugvónak és szabadnak tekinthető elektronnal. A visszaverődő foton a beesővel ellentétes irányban halad.

- Mekkora a beeső foton hullámhossza?
- Mekkora az ütközés után az elektron sebessége?
- A visszaverődő foton hullámhossza hány százalékkal nagyobb a beesőénél?

#### 7. feladat.

Mekkora szöggel térül el egy foton egy elektronon való szóródás után, ha hullámhossza  $\Delta\lambda = 1,2$  pm-rel nőtt?

#### 8. feladat.

Mekkora volt az elektronon szóródó foton energiája az ütközés előtt, ha a  $\vartheta = 90^\circ$  szögű szóródás után  $\varepsilon = 6,4 \cdot 10^{-14}$  J lett?

#### 9. feladat.

Határozzuk meg a röntgenfoton maximális hullámhosszváltozását, ha rugalmasan üt-

közik elektronnal, illetve protonnal.

### 10. feladat.

Egy igen nagy, homogén pozitív töltésű fémlemez közepén lyuk van, ahol egy elektron található. Az elektronon szóródik egy foton, emiatt az elektron a lemez normálisával  $\vartheta$  szöget bezárva kezd el mozogni.

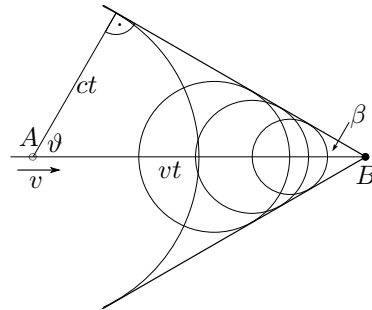
Írjuk le az elektron mozgását, ha (a)  $\vartheta = 0^\circ$ , (b)  $\vartheta = 45^\circ$ .

## 3.2. Cserenkov-sugárzás

Ismert, hogy a fény vákuumbeli sebessége határsebesség, annál (jelen ismereteink szerint) semmi sem haladhat gyorsabban. Anyagban azonban a fénysebesség lecsökken, így a *közegbeli* fénysebességnél megjelenhetnek gyorsabban haladó részecskék, amelyek a hangrobbanáshoz hasonlóan kúp alakban hullámokat bocsátanak ki (ezúttal nem hangot, hanem fényt). A jelenséget először *Pavel A. Cserenkov (1904-1990)* értelmezte, ezért nevezzük azt *Cserenkov-sugárzás*nak.

### 3.2.1. A jelenség értelmezése

Tekintsünk egy  $v > c$  sebességgel egyenes vonalban haladó részecskét, amely  $c$  terjedési sebességű elektromágneses hullámot bocsát ki útja során. A részecskéből mindenütt gömbhullámok indulnak ki, de ezek, mivel a forrás a terjedési sebességüknél gyorsabban mozog, feltorlódznak. A geometriai optikából ismert *Huygens-elv* szerint a sugárzás az elemi gömbhullámok burkolójánál jelenik meg. A berajzolt néhány gömbhullám alapján nyilvánvaló, hogy az ilyen elrendeződésű gömbhullámok burkolója egy olyan kúpfelület, amelynek csúcsa a részecske pillanatnyi helyzete. Most ennek a kúpfelületnek a  $\beta$  félnyláásszögét számítjuk ki.



3.2. ábra. Cserenkov-sugárzás

Tekintsük a részecskének az ábrán  $A$ -val jelölt helyzetét: innen a részecske a  $B$ -vel jelölt állapot eléréséig  $vt$ , az onnan kiindult hullámok  $ct$  utat tettek meg. Ha a kúp érinti a gömböt (a hosszmetzeti képen az egyenes a kört), akkor az egyenes merőleges a kör érintési pontba húzott sugarára: a derékszögű háromszögben  $\sin \beta = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$ . Emiatt úgy tekinthető, hogy a részecske minden pozíciójában csak  $\vartheta = 90^\circ - \beta$  szög alatt bocsát ki fotonokat: erre a szögre

$$\cos \vartheta = \frac{c}{v} \quad (3.8)$$

teljesül: ez a Cserenkov-sugárzás legfontosabb egyenlete.

Összefoglalva: a Cserenkov-sugárzás a közegbeli fénysebességnél gyorsabb töltött

részecskék által okozott sugárzás, amely a részecskék haladási irányával  $\vartheta$  szöget bezáró irányban indul el: erre a szögre  $\cos \vartheta = \frac{c}{v}$  teljesül.

**Megjegyzés.** A levezetés során sehol nem használtuk ki, hogy fényhullámokról van szó, bármilyen hasonló jelenség (pl. a hangrobbanás) is ugyanígy írható le.

### 3.2.2. Példák

1. A nyitott medencés atomreaktorokban (kutató-, oktatóreaktorok) a fűtőelemek környezetében kékes derengés figyelhető meg, amit a  $\beta$ -bomlások során kilépő elektronok Cserenkov-sugárzása okoz.
2. Nagy energiájú részecskék sebességének pontos mérését is lehetővé teszi a Cserenkov-effektus: a közeg törésmutatója és a fénykúp elhajlási szöge ismeretében a részecskék sebessége kiszámítható.
3. A kozmikus sugárzás által keltett elektronok Cserenkov-sugárzásának mérésével adatok gyűjthetők a légkörről és a kozmikus sugárzásról.

### 3.2.3. Feladatok

#### ‡1. feladat.

Ha gyors elektronok nyalábja halad át vízen, halvány fény látható körülötte: ez a Cserenkov-sugárzás. Az elektronra és az általa kibocsátott fotonra felírva az energia- és lendületmegmaradást határozzuk meg azt a minimális elektronsebességet, aminél ilyen sugárzás létrejöhet. (A közegben terjedő foton energiája  $E = pc_k$ , ahol  $c_k$  a közegbeli fénysebesség.)

## 3.3. A de Broglie-féle anyaghullám

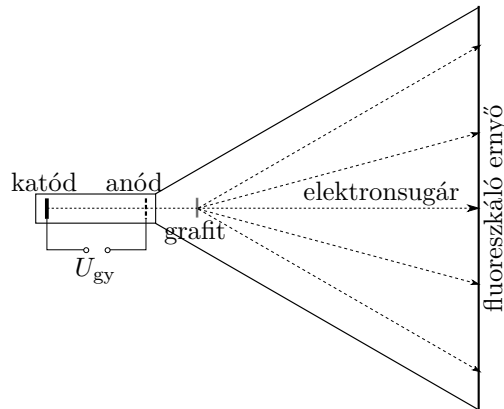
A modern fizika alapkérdése: a világot részecskék vagy hullámok halmazaként képzeljük el? A fény esetében a problémát Planck vetette fel a fotonok feltételezésével: ez valóban érdekes kérdés volt, ugyanis mind a hullám-, mind a részecsketermészet mellett szóltak bizonyítékok. Tegyük fel, hogy a két természet egyszerre létezik. A fény egy fotonjának az energiája Planck szerint  $hf$ , a relativitáselmélet értelmében pedig  $mc^2$ . A két természet szerinti energiaképlet összevetéséből:

$$mc^2 = hf \rightarrow mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

és mivel  $p = mc$ ,  $p = \frac{h}{\lambda}$  vagy

$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{3.9}$$

*Louis-Victor de Broglie* 1924-ben feltételezte, hogy a fenti összefüggés nem csak a fényre (fotonokra), hanem bármilyen részecskére igaz, kapcsolatot teremt a kétféle természet között.



3.3. ábra. Interferencia kristályrácson

$$\text{Anyaghullám: } \lambda = \frac{h}{p}$$

azaz a  $p$  lendületű anyag olyan interferenciaképet alakít ki, mint a  $\lambda = h/p$  hullámhosszúságú hullám. Ez a *de Broglie-törvény*.

A törvény kísérleti igazolását 1927-ben végezte el *Davisson, Germer*, és *George Thomson* kristályrácson – sikerült kimutani az elektron hullámtermészetét. Davisson és Thomson ezért 1937-ben Nobel-díjat kapott (*érdekesség: J. J. Thomson* az elektron fajlagos töltésének meghatározásáért, azaz az elektron részecske voltának igazolásáért kapta meg a díjat, míg fia, G. Thomson a hullámtermészet igazolásáért nyerte el az elismerést).

Órai megfigyelés: elektronok interferenciája grafitkristályon (vékony grafitfólián) – a fluoreszcens ernyőn koncentrikus körökben jelennek meg az erősítési helyek (a kísérleti elrendezés vázlatát a 3.3. ábrán láthatjuk). Más mikrorészecskékkal (akár fullerénmolekulákkal) is elvégezhetőek ilyen interferenciakísérletek.

**Megjegyzés.** Azt, hogy a kristályrács alkalmas interferencia létrehozására, *Max von Laue* bizonyította 1912-ben: ő röntgensugarakat ejtett réz-szulfát kristályokra. A kialakult interferenciakép a szilárd anyag atomos-kristályos felépítésén kívül a röntgensugárzás hullámtermészetét is bizonyította (ez a század elején vitás kérdés volt): ezért a kísérletet néha „két legyet egy csapásra”-kísérletnek is nevezik.

**Példa.** Mekkora a sétáló ember hullámhossza?

**Megoldás.** A Broglie-törvényből:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{66,2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}} \approx 10^{-35} \text{ m}$ . Ilyen méretű rés nincs a természetben: az atom átmérője kb.  $10^{-10} \text{ m}$ , az atommagé is kb.  $10^{-14} \text{ m}$ .

**Tanulság.** A Broglie-törvény makroszkopikus testekre semmitmondó, csak a mikrovilágban van értelme.

### 3.3.1. Feladatok

#### 1. feladat.

Mekkora hullámhosszúságú foton felel meg egy nyugvó elektron tömegének?

#### 2. feladat.

Egy elektron energiája 1 eV. Mekkora az elektron lendülete és mekkora a hozzárendelt Broglie-hullám hosszúsága?

#### 3. feladat.

Egy proton és egy foton egyaránt  $2 \cdot 10^{-19}$  J mozgási energiával rendelkezik. Hogyan aránylanak egymáshoz hullámhosszaik, lendületeik?

#### 4. feladat.

Mekkora az elektron Broglie-hullámhossza, ha a sebessége a fénysebesség 1%-a? Mennyi ekkor a mozgási energia?

#### 5. feladat.

Mekkora a 3000 V-os gyorsító feszültségen átengedett elektron hullámhossza?

#### 6. feladat.

Határozzuk meg a Broglie-hullámhosszát egy

- (a)  $6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel mozgó elektronnak,
- (b) egy  $13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel mozgó 0,15 kg tömegű labdának.

#### 7. feladat.

Az elektron és a  $\lambda = 661$  nm hullámhosszúságú fény által kialakított elhajlási kép esetében azonos helyen vannak az erősítési helyek, azonos mérési elrendezésben.

- (a) Mekkora az elektron sebessége?
- (b) Mekkora feszültséggel lehet erre a sebességre felgyorsítani az elektronokat? Számoljunk klasszikus fizikai képlettel.

#### 8. feladat.

A 3.3. ábrán látható diffrakciós kísérletet végezzük el grafittal. Az  $U_{\text{gy}} = 12,5$  kV feszültséggel gyorsított elektronok áthaladnak a vékony grafitfólián, majd az attól  $l = 30$  cm-re elhelyezkedő fluoreszcens ernyőbe csapódnak. Az ernyőn erősítési gyűrűk jelennek meg, ezek közül a legkisebb átmérője  $d = 46,4$  mm. Mekkora a grafit rácsállandója?

#### †9. feladat.

Az atommag szerkezetének vizsgálatához nagyenergiájú elektronnyalábot alkalmazunk. Mekkora energiájú elektronokra van ehhez szükség?

#### †10. feladat.

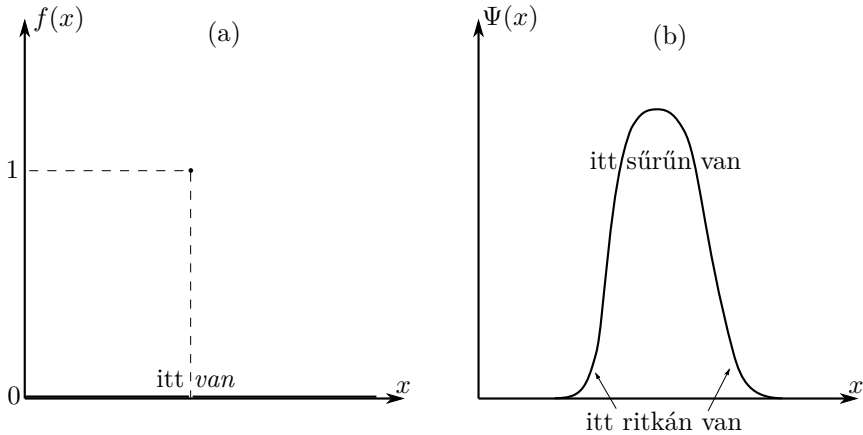
Egy molekula helyét fényvel 10% pontossággal sem lehet feltérképezni. Mi ennek az oka?

#### 11. feladat.

Határozzuk meg a szobahőmérsékletű hélium egy atomjának Broglie-hullámhosszát.

#### †‡12. feladat.

Mekkora a csillagok belső hőmérséklete? A becsléshez a következőt használjuk fel: két termikus sebességgel mozgó proton halad egymással szembe, és annyira megközelítik egymást, amennyire az elektromos taszítóerő ezt megengedi. A két proton fúziója



3.4. ábra. Helyfüggvények

akkor megy végbe, ha a véghelyzetben a protonok távolsága  $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ , ahol  $\lambda$  a kezdeti Broglie-hullámhosszat jelöli. Használjunk nemrelativisztikus közelítést. Határozzuk meg a csillagok belső hőmérsékletét alapvető fizikai állandókkal, és számítsuk ki. (A 2009. évi Nemzetközi Fizikai Diákolimpia részfeladata)

## 3.4. A kvantummechanika alapjai

A mikrorészecske terjedés közben hullámként, kölcsönhatáskor, becsapódáskor, méréskor egyetlen részecskeként képzelhető el. Ezt a csak *látszólagos* ellentmondást *Erwin Schrödinger (1887–1961)* oldotta fel. Ő dolgozott ki olyan matematikai módszert, amellyel a két természet egyidejűleg megmagyarázható. Ebből fejlődött ki a **kvantummechanika**.

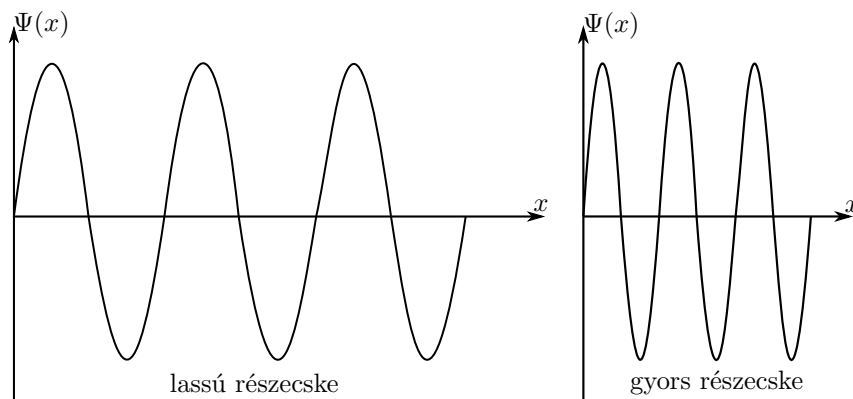
### 3.4.1. A hely megadása

(a) A klasszikus fizikában a helyet egy  $f(x)$  helyfüggvénnyel adjuk meg. Ennek definíciója:  $f(x) = 1$ , ahol a részecske tartózkodik, mindenhol máshol  $f(x) = 0$ . Ezzel a leírással „hajszálpontosan” megadjuk a részecske helyét, de mozgásállapotáról nem tudunk semmit.

(b) A kvantumfizika szemlélete az „elmosódott pont”. Az  $f(x)$  függvény nem csak egy pontban vesz fel nemnulla értéket, hanem egy területen: a kisebb értékeknél a részecske kis valószínűséggel, nagyobb értékeknél pedig valószínűbben tartózkodik. A kétféle helyfüggvény a 3.4. ábrán látható. A hely „pontatlan” megadásáért cserébe azonban úgy kellene megkonstruálnunk a  $\Psi(x)$  helyfüggvényt, hogy az információt hordozzon a mozgásállapotról is.

A  $\Psi$  állapotfüggvény amplitúdója a helyet, a változékonysága („cifrasága”) a mozgásállapotot írja le, ilyet láthatunk a 3.5. ábrán. Az ilyen függvényt a kvantumfizi-





3.5. ábra. Lassú és gyors részecskék állapotfüggvényei

kában a részecske állapotfüggvényének nevezzük. A  $p$  lendületű részecske állapotát a Broglie-törvény értelmében  $\lambda = \frac{h}{p}$  hullámhosszúságú szinusz hullámmal írjuk le.

**Probléma:** A részecske mozgásállapota most pontosan ismert, helyéről azonban semmit sem tudunk, hiszen a szinuszfüggvény végtelen sok helyen vesz fel egyforma értéket: egy részecske állapotfüggvénye nem lehet végtelen szinusz hullám.

**Megoldás:** a *hullámcsomag* – végtelen sok különböző szinusz hullám megfelelő amplitúdójú és fázisú szuperpozíciója.

$$\lambda_1 \rightarrow p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 \rightarrow p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$$

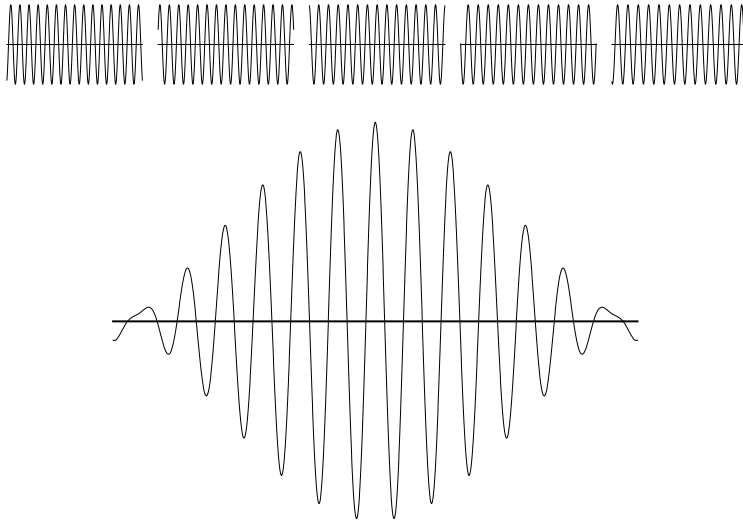
$$\vdots$$

$$\lambda_i \rightarrow p_i = \frac{h}{\lambda_i}$$

$$\vdots$$

A hullámcsomagot alkotó szinuszfüggvények hullámhosszából kiszámíthatóak az adott állapotra jellemző lehetséges lendületértékek. A részecske lendületének mérése ennek a lendületérték-halmaznak egy elemét adja meg. Egy adott lendületérték mérésének valószínűsége annál nagyobb, minél nagyobb a neki megfelelő hullámhosszú hullám amplitúdója a hullámcsomag felépítésében.

A 3.6. ábrán egy egyszerű hullámcsomagmodell látható: öt, közeli hullámhosszú szinusz hullámot és azok azonos amplitúdóval vett összegét ábrázolja: ez utóbbi már valóban jól közelít egy hullámcsomagot.



3.6. ábra. Hullámcsomag

### A kvantummechanika két alaptörvénye:

1. *A kvantumosság elve:* bármely egynemű anyag egy meghatározott elemi egység (kvantum) egész számú többszöröseként fordul elő. E részecske viselkedését a  $\Psi$  előjeles<sup>1</sup> állapotfüggvénnyel írjuk le. Annak a valószínűsége, hogy a kvantumot a tér egy megadott  $V$  tartományában megtaláljuk:

$$w = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

2. *Szuperpozíció-elv:* Ha egy részecske létezhet valamely két  $\Psi_a$  és  $\Psi_b$  állapotban, akkor létezik a  $\Psi = \Psi_a + \Psi_b$  eredő állapotban is.

### 3.4.2. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

A természetben nem szabadon kószálnak az elektronok, – és más részecskék – hanem vonzóerők kis helyen tartják őket. Egy ilyen elektront egy hullámcsomag-állapotfüggvény ír le. A hullámcsomag végtelen sok szinusz hullám szuperpozíciója. Ha a csomag mérete kicsi, azaz az elektron helye megbízható, akkor a csomagot sok kicsi hullámhosszú hullám alkotja, ezekhez azonban a Broglie-törvény szerint nagy lendületértékek tartoznak. Tehát a kisméretű csomaghoz nagy lendületek is tartozhatnak.

A hullámcsomag mérete (a hely szórása):  $\Delta x \geq \frac{\lambda_{\min}}{\pi}$ . A lendületbizonytalanság (a lendület szórása) ilyen alakú hullámcsomagokban  $\Delta p_x = \frac{p_{\max} - 0}{2} = \frac{p_{\max}}{2}$ . Ebből

<sup>1</sup>A hullámfüggvény a kvantummechanika standard leírásában komplex értékű függvény, ettől azonban ezen a szinten eltekinthetünk.

tehát  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\lambda_{\min}}{\pi} \frac{p_{\max}}{2} = \frac{1}{2\pi} \lambda_{\min} \frac{h}{\lambda_{\min}} = \frac{h}{2\pi}$ . Pontosabb, általánosabb számítások alapján:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar.$$

Az egyenletet *Heisenberg-féle határozatlansági reláció*nak nevezzük (1927). A képletben  $\hbar$  kiolvasási módja: „há-vonás”.

### Következmény.

Nincs akadálya sem annak, hogy egy részecske helyét, sem annak, hogy lendületét tetszőleges pontossággal megadjuk. A természet viszont határt szab annak, hogy a két adatot egyszerre tetszőleges pontossággal megadjuk.

### Megjegyzések.

1. A határozatlansági törvény is csak mikroszkopikus testekre értelmes. Például tegyük fel, hogy egy 10 grammos puskagolyó sebességét  $1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  pontossággal ismerjük. Ekkor a helymérés pontosságának elméleti határa:  $\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{h}{m\Delta v} \approx 10^{-29}$  m. Ez nyilván nem érhető el, és a sebességmérésnél is irreális pontosságot tettünk fel. Ám egy molekula ( $\Delta x = 10^{-9}$  m) szorított elektron sebességbizonytalansága az előző összefüggések alapján  $\Delta v = \frac{h}{m\Delta x} \approx 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ami már számottevő bizonytalanság.
2. További határozatlansági elvek: a hely-lendület határozatlansági elv nem csak a koordináta-rendszer  $x$ -iránya mentén áll fenn, hanem az  $y$  és  $z$  irányok mentén is. Ezen kívül létezik még egy határozatlansági elv:  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ . Itt  $\Delta E$  a részecske energiájának változékonysága, míg  $\Delta t$  az időtartam bizonytalansága (megfigyelési időtartam, állapot élettartama, stb.).
3. Egy dolgot két egymással összeférhetetlen módon írunk le: csak a fizika számára újszerű gondolat, a teológia és filozófia régóta él vele: test–lélek kettőse. A „homályos látás”, ami a kettős természet mögött áll, egy szintén egyszerű példával illusztrálható: alulról kör, oldalról háromszög, mi az?
4. Az atomfizikában az anyag olyan viselkedésére derült fény, amelynek nincs közvetlen megfelelője érzékletes benyomásaink „hétköznapi világában”. Ez utóbbinak eredete ugyanis makroszkopikus, ahol a kvantummechanikai törvények már nem érvényesülnek észrevehetően.

### 3.4.3. Feladatok

#### 1. feladat.

Mekkora a tömege annak a részecskének, amelyet  $\Delta x = 10^{-10}$  m sugarú tartományba bezárva a közepes sebességnagyságtól átlagosan  $\Delta v = 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  eltérést kapunk a sebességmérés során?

#### 2. feladat.

Egy tárgy helyének elmosódottsága  $\Delta x = 1,5 \cdot 10^{-11}$  m.

(a) Határozzuk meg a lendület bizonytalanságát.

(b) Határozzuk meg a sebesség bizonytalanságát

( $\alpha$ ) egy elektron;

( $\beta$ ) egy pingponglabda ( $m = 2,2 \cdot 10^{-3}$  kg) esetében.

**3. feladat.**

Egy  $m = 0,045$  kg tömegű kislabda és egy elektron sebessége egyaránt  $v = 71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  nagyságú. A sebesség elmosódottsága 1%-os. Becsüljük meg a hely bizonytalanságát mindkét esetben.

**†4. feladat.**

A gyenge kölcsönhatás hatására egy neutronból proton lesz, miközben elektron válik szabaddá. Ez az elektron benne lehetett a neutronban? A neutron sugarát vegyük  $10^{-15}$  m-nek.

**†5. feladat.**

Lehet-e az atommagban elektron, ahogyan az első atommagmodellekben feltételezték? Az atommag sugara kb.  $10^{-14}$  m.

**†6. feladat.**

Létezik-e tökéletes nyugalom, amikor megszűnik a mozgás?



## 4. fejezet

# Bevezetés a statisztikus fizikába

### 4.1. Entrópia

#### 4.1.1. A II. főtétel

A termodinamika első főtétele szerint egy hőtani rendszerrel közölt hő és a rajta végzett munka felelős annak belső energiájának megváltozásáért:

$$\Delta E_b = Q + W; \tag{4.1}$$

ez lényegében az energia megmaradását fogalmazza át hőtani rendszerekre.

Az első főtétel azonban számos olyan folyamatot is megenged, ami a valóságban nem megy végbe. Képzeljünk el például egy hőszigetelő edényt, amelyet hővezető fal választ ketté: az egyik felébe 0 °C-os, a másikba 100 °C-os vizet öntünk. Mi történik ezután? Az első főtétel alapján elképzelhető, hogy a fagypontra levő víz hőt ad át a forrásban levőnek, így a hidegebb víz megfagy, a melegebb pedig felforr. Mindennapi tapasztalataink alapján azonban tudjuk, hogy nem ez történik, hanem mindig a melegebb víz hűl le és a hidegebb melegszik fel, végül a két edényben levő víz hőmérséklete azonos lesz. *Az önként végbemenő hőtani folyamatoknak tehát egyértelmű, jól meghatározott iránya van: ezt az irányt adja meg a hőtan II. főtétele.*

A második főtételnek számos, egymással ekvivalens megfogalmazása van, ezek közül a két legfontosabb:

1. *Clausius*-féle megfogalmazás: hő önként (külső munkavégzés nélkül) nem mehet át hidegebb testről melegebb testre, csak fordított irányú folyamatok léteznek.

---

A statisztikus fizika nem tartozik szorosan a Szilárd Leó Fizikaverseny tematikájába. A könyvben azért szerepel mégis, mivel a verseny feladatai közt előfordulnak olyanok, amelyeknél a téma mélyebb ismerete előnyös, illetve mert a statisztikus fizika az általános tananyagban periferiális helyet foglal el, ezzel a fejezettel egyfajta hiánypótlás is célunk volt.

2. *Kelvin–Planck*-féle megfogalmazás: nincs olyan periodikusan működő gép, amely a hőenergiát 100%-os hatásfokkal mechanikai munkává tudná alakítani (az ilyen gépet *másodfajú perpetuum mobilé*nek nevezzük).

A fenti megfogalmazások több szempontból eltérnek a fizikai törvények megszokott alakjától: nem valamilyen állítás teljesüléséről szólnak, hanem arról, hogy bizonyos folyamatok nem létezhetnek. Másrészt, mindkét megfogalmazás nagyon speciális, nem látszik róluk, hogy egy általános természeti törvényt írnak le, sokkal inkább azok speciális esetének tűnnek (bár az összes megfogalmazás egymással ekvivalens, bármelyikből az összes többi levezethető). Ezért most egy univerzálisabb megfogalmazást keresve bevezetjük az *entrópia* fogalmát.

### 4.1.2. Az entrópia fogalma

A hőtani mennyiségeket két csoportba sorolhatjuk: az *állapotjelzők* (pl. a nyomás, térfogat, hőmérséklet, belső energia, ...) a hőtani rendszer egy állapotára, míg a *folyamatok jellemzői* (pl. hő, tágulási munka, ...) a rendszerrel végbemenő folyamatokra jellemzők. A hőközlést általában az átadott hővel szoktuk jellemezni, ez azonban nem állapotjelző. Emiatt megpróbálunk egy, a hőközlésre jellemző állapotjelzőt definiálni.

Legyen az  $S$  mennyiség megváltozása egy folyamat nagyon rövid szakaszán (ahol a hőmérséklet jó közelítéssel állandónak tekinthető)

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

ahol  $\delta Q$  az adott szakaszon felvett hő,  $T$  pedig a termodinamikai hőmérséklet. A rövid szakaszokon adódó változásokat összegezve (integrálva) a mennyiség megváltozása két állapot között:

$$\Delta S(A \rightarrow B) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.2)$$

Megmutatható, hogy az így definiált mennyiség megváltozása tetszőleges körfolyamat során 0, ezért jellemző a hőtani rendszer állapotára. Az így definiált  $S$  állapotjelzőt *entrópiának* nevezzük.

A fenti definíció nem határozza meg egyértelműen egy állapot entrópiáját, csak tetszőleges két állapot entrópiakülönbségét. Ez azt jelenti, hogy az *entrópia nullaszintje szabadon megválasztható*, akárcsak a potenciális energiáké.

A definíció alapján könnyen levezethető (a levezetést most mellőzzük), hogy  $N$  részecskeszámú,  $f$  szabadsági fokú ideális gáz entrópiája a következőképp függ a térfogattól és a hőmérséklettől:

$$S = Nk \left( \frac{f}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{V}{V_0} \right), \quad (4.3)$$

ahol az entrópia nullaszintjét a  $T_0$  hőmérsékletű és  $V_0$  térfogatú állapotban választjuk és  $k$  a Boltzmann-állandó.

**Megjegyzés.** Az entrópia fenti értelmezése a *fenomenologikus termodinamikai értelmezés*. Az entrópiát viszont statisztikailag is értelmezhetjük. Ha  $p_i$  az  $i$ . mikroállapot (a rendszert alkotó mikrorészecskék minden jellemző adata együtt határoz meg egy mikroállapotot) megvalósulási valószínűségét jelöli, az entrópiát a következőképpen is kiszámíthatjuk:

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i, \quad (4.4)$$

Ha a rendszert energetikailag elzárjuk a környezetétől, az adott energiájú makroállapotot (a makroszkopikus állapotjelzők adott értékei) megvalósító minden mikroállapot egyformán valószínű: az ilyen rendszer entrópiája az eddigiek szerint  $S = k \ln Y$ , ahol  $Y$  a mikroállapotok száma.

### 4.1.3. A II. főtétel megfogalmazása az entrópia segítségével

Belátható, hogy a II. főtétel eddigi megfogalmazásai ekvivalensek a következő állítással:

Zárt rendszer (azaz olyan rendszer, amely nem cserél energiát a környezettel) entrópiája spontán folyamatok során nem csökkenhet:

$$\Delta S \geq 0. \quad (4.5)$$

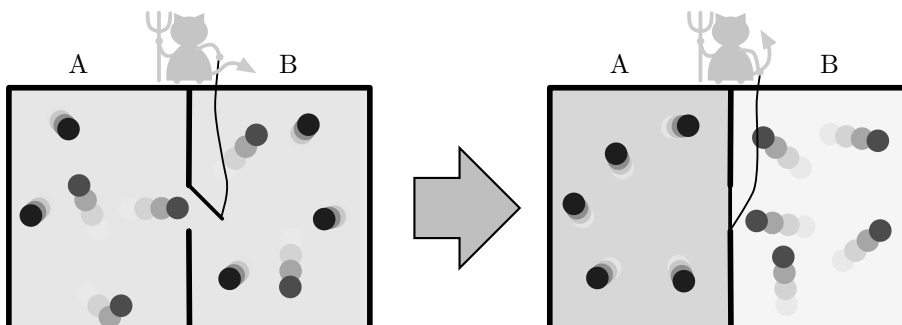
Ez a termodinamika II. főtétele az entrópiával kifejezve.

A II. főtétel e megfogalmazása azonban sokkal általánosabb érvényű, mint a Clausius-féle, illetve a Kelvin–Planck-féle változat, ugyanis az entrópia a fenti termodinamikai értelmezésnél sokkal általánosabban, más kölcsönhatásokra is értelmezhetően is definiálható. A II. főtétel ezen alakja tehát a teljes fizika alapvető fontosságú törvénye.

#### Megjegyzések.

1. A II. főtétel a fizika jelenleg ismert egyetlen olyan törvénye, amely nem szimmetrikus az idő folyásirányára, tehát *az idő haladási irányát* csak a II. főtétel segítségével dönthetjük el.
2. Mivel minden rendszer entrópiájának van egy elméleti maximuma, a II. főtételt a következőképp is kimondhatjuk: egy termikus egyensúlyba került zárt rendszer entrópiája állandó, értéke pedig a lehető legnagyobb.
3. Az entrópia fenomenologikus és statisztikus fizikai értelmezése közötti alapvető különbségre a II. főtétel mutat rá. Egy rendszer mikroállapotait nem határozzák meg egyértelműen a makroszkopikus jellemzők; az azok által megengedett mikroszkopikus felállások közül a maximális entrópiájú valósul meg, ezt érzékeljük, mint fenomenologikus entrópiát.
4. A II. főtételt az entrópia mikroállapotokkal történő definíciójával összevetve annak egy újabb megfogalmazását mondhatjuk ki: *egy termikus egyensúlyban levő zárt rendszer azt a makroállapotot veszi fel, amelyet a lehető legtöbb mikroállapot valósít meg*. Ez rámutat a II. főtétel statisztikus jellegére: nyilvánvalóan ennek a makroállapotnak a *valószínűsége* a legnagyobb, viszont ha a rendszer elég nagy (elég sok részecskét tartalmaz), minden más makroállapot valószínűsége elhanyagolható lesz emellett, így *tulajdonképpen mindig* a maximális entrópiájú makroállapot fog megvalósulni. A II. főtétel tehát csak nagyméretű rendszerekre érvényes teljes biztonsággal, kis rendszerek átmenetileg a II. főtételnek ellentmondó állapotokba is kerülhetnek.





4.1. ábra. A Maxwell-démon (a hidegebb részeket sötétebb szín jelöli)

A következőkben a II. főtétel egy speciális alkalmazását vizsgáljuk meg.

#### 4.1.4. Az információ és az entrópia kapcsolata

A következőkben egy hipotetikus lényt fogunk vizsgálni. Ez a lény a *Maxwell-démon*, akinek ténykedése látszólag megcáfolja a II. főtételt. A démon egy olyan gáztartály mellett ül, amelyet egy hőszigetelő fal két részre oszt. A falon egy kis (molekuláris méretű) „ajtó” található, amelyen egyszerre egy molekula fér át: ezt az ajtót a molekulákat „látó” démon tetszése szerint, nagyon gyorsan és energiabefektetés nélkül tudja nyitni és zárni. Az elrendezést a 4.1. ábra mutatja.

Tegyük fel, hogy a démon úgy nyitja és zárja az ajtót, hogy a „lassú” (adott értéknél kisebb mozgási energiájú) molekulák a tartály bal, a „gyorsak” pedig a jobb oldali felében gyűlnek össze. Ekkor a tartály bal felének hőmérséklete lecsökken, a jobb féle pedig nő. Mivel a démon közvetlenül nem végez(tet) munkát a gázon, ez azt jelentené, hogy a gázban lényegében önként hőmérsékletkülönbség alakul ki, ami ellentmond a II. főtétel Clausius-féle megfogalmazásának.

A Maxwell-démon problémáját először *James Clerk Maxwell (1831-1879)* vetette fel; a problémát később *Lord Kelvin* is vizsgálta: tőle kapta a probléma a Maxwell-démon nevet, illetve ő dolgozta ki számos, hasonló ellentmondásra vezető „démon” elvét. Mivel mindketten sok részecskét tartalmazó rendszerekkel (gázokkal) foglalkoztak, nem tudtak megnyugtató, kvantitatív megoldást adni a problémára.

A Maxwell-démon okozta ellentmondást *Szilárd Leó (1898-1964)* oldotta fel 1929-ben, lényegesen egyszerűbb modell alkalmazásával. Szilárd gondolat kísérletében a gáztér fogatban *egyetlen részecske helyezkedik el*, a démon célja az, hogy ezt a részecskét az ajtó megfelelő pillanatban való becsukásával az edény egyik, *előre meghatározott felébe zárja*. Ha ez sikerül a démonnak, azzal izotermikusan (hiszen a „gázzal” nem közölt energiát) az eredeti térfogat felére „nyomta össze” a „gázt”, ez (4.3) értelmében csökkentené a gáz entrópiáját, ami viszont a II. főtétel szerint energiaközlés nélkül nem lehetséges.

Vegyük észre azonban, hogy ahhoz, hogy a démon „lássa” a részecskét (ami feltétle-

nül szükséges feladata végrehajtásához), *mérést kell végeznie* arra vonatkozólag, hogy a részecske az edény melyik felében van: ezzel 1 bit információt szerez. Mivel a démon a mérésen és az entrópiacsökkentésen kívül semmit sem csinál a gázzal, szükségképpen a mérés folyamata legalább annyival növeli a rendszer entrópiáját, amennyivel a démon azt utólag csökkenteni tudja. Ez a gondolat vezette Szilárdot arra a feltételezésre, hogy *minden információ megszerzése növeli annak a rendszernek az entrópiáját, amelyen az információt biztosító mérést végeztük*. Az entrópia e megjelenési formáját a statisztikus fizikában *információs entrópiának* nevezzük.

**Megjegyzés.** Szilárd nem volt pontosan tisztában azzal, hogy a mérés *milyen módon* növeli a rendszer entrópiáját. A gondolat kísérlet későbbi vizsgálatai a mérés számos lehetséges módjáról kimutatták, hogy azok során valóban a Szilárd által megjósolt nagyságú entrópia keletkezik.

#### 4.1.5. Feladatok

##### 1. feladat.

- (a)<sup>‡</sup> Bizonyítsuk be a 4.3. egyenletet az entrópia definíciójának felhasználásával.  
 (b) Számítsuk ki az ideális gáz entrópiáját a részecskeszám, a nyomás és a térfogat függvényében.  
 (c)<sup>†</sup> Vezessük le az adiabatikus állapotváltozás egyenletét.

##### †2. feladat.

Vezessük le a II. főtétele entrópiával megfogalmazott alakjából a Clausius- és a Kelvin-Planck-féle megfogalmazásokat. (*Segítség:* alkalmazunk indirekt bizonyítást.)

##### ‡3. feladat.

Egy  $C_1$  hőkapacitású és  $T_1$  hőmérsékletű, valamint egy  $C_2$  hőkapacitású és  $T_2$  hőmérsékletű hőtartályt termikus kapcsolatba hozunk. Mennyivel változik meg az egyensúly beálltáig a rendszer entrópiája?

##### †4. feladat.

A 4.1.4. fejezet gondolatmenetével számítsuk ki 1 bit információ entrópiaértékét.

##### 5. feladat.

- (a) Számítsuk ki a Carnot-körfolyamat hatásfokát.  
 (b)<sup>†</sup> Bizonyítsuk be, hogy adott  $T_1 > T_2$  hőmérsékletű hőtartályok között működő körfolyamatok közül a Carnot-körfolyamatnak a maximális a hatásfoka.  
*Segítség:* ábrázoljuk a folyamatot  $S$ - $T$  állapot síkon.

##### †‡6. feladat.

Induljunk ki a következő négy, igaz állításból:

- (a) Az  $S$  entrópia természetes változói az  $U$  belső energia, az  $N$  részecskeszám és a  $V$  térfogat (feltesszük, hogy a térfogat és a részecskeszám állandó, emiatt a belső energia egyedüli megváltozási módja a hőközlés).  
 (b) Egyensúlyban az entrópia maximális.  
 (c)  $dS = \delta Q/T = dU/T$ , ebből  $dS/dU = 1/T$ .  
 (d) Egy  $f(x)$  függvény maximumában a  $df/dx$  derivált nulla.

Ezekből együtt az következik, hogy  $1/T = dS/dQ = 0$ , azaz egyensúlyban egy termodinamikai rendszer hőmérséklete végtelen. Ez nyilván nincs így; mi a hiba a gondolatmenetben?

## 4.2. Boltzmann-eloszlás

### 4.2.1. Az ekvipartíció tétele

Az *ekvipartíció tétele* azt mondja ki, hogy termikus egyensúlyban egy hőtani rendszer minden *termodinamikai szabadsági fokára* (egymástól független, a koordinátáktól, sebességkoordinátáktól négyzetesen függő energiatárolási módjára) *átlagosan azonos energia* esik. Most ennek az energiának a nagyságát határozzuk meg.

A kinetikus hőelméletből levezettük, hogy egy gáz molekuláinak átlagos mozgási energiája

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT,$$

ahol  $k = R/N_A$  a *Boltzmann-állandó*,  $T$  pedig az abszolút hőmérséklet. Egy molekula mozgási energiája azonban három független, egymástól függetlenül változtatható komponensből áll össze ( $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$ ), tehát egy molekula mozgási energiája 3 termodinamikai szabadsági fokot tartalmaz: az ekvipartíció tételét és a fenti egyenletet felhasználva azt találjuk, hogy 1 termodinamikai szabadsági fokra molekulánként átlagosan  $\frac{1}{2}kT$  energia jut.

Az ekvipartíció tétele tehát a következőt mondja ki: *egy  $T$  hőmérsékletű hőtartállyal termikus egyensúlyban levő hőtani rendszer molekuláinak átlagosan  $\frac{1}{2}kT$  energiája van termodinamikai szabadsági fokonként.*

**Megjegyzés.** Az ekvipartíció fenti megfogalmazása csak sokrészecske-rendszerekre (anyag halmazok) értelmezhető, miközben maga a tétel jóval általánosabb érvényű. A következő megfogalmazás is érvényes: egy  $T$  hőmérsékletű hőtartállyal termikus egyensúlyban levő hőtani rendszernek átlagosan  $\frac{1}{2}kT$  energiája van termodinamikai szabadsági fokonként; ebben az esetben a termodinamikai szabadsági fokok száma nem az anyagi minőségre, hanem a rendszerre jellemző mennyiség lesz ( $N$  darab  $f$  szabadsági fokú molekulából álló gáz termodinamikai szabadsági fokainak a száma tehát  $Nf$  lesz e definíció szerint). Ez utóbbi megfogalmazás akkor is alkalmazható (és igaz), ha nem anyagi (molekuláris) rendszereket, hanem energiát más módon tároló rendszereket vizsgálunk.

Az ekvipartíció tétele meglehetősen általános érvényű összefüggés, azonban láthatóan tapasztalati jellegű: a következőkben elméletileg fogjuk megalapozni.

### 4.2.2. A Boltzmann-eloszlás levezetése

Tegyük fel, hogy van egy elemi rendszerünk ( $R_1$ ), amelynek energiája az  $E_1, E_2, \dots$  értékeket veheti fel. Ezt a rendszert egy  $T$  hőmérsékletű, hatalmas hőkapacitású hőtartályba ( $R_2$ ) helyezzük, majd az egészet hőszigetelő fallal vesszük körbe. A rendszer

összenergiája legyen  $E$ : ez a hőszigetelő fal miatt nem változik, a hőtartály nagy hőkapacitása miatt pedig  $E_i \ll E$   $R_1$  minden energiaszintjére. A nagy hőkapacitás még azt is jelenti, hogy a termikus egyensúly beállása után is  $T$  lesz a rendszer hőmérséklete.

Meghatározzuk, hogy mekkora lesz a  $P(E_i)/P(E_j)$  arány, ahol  $P(E_i)$  annak a valószínűségét jelöli, hogy az egyensúly beállta után  $R_1$  az  $E_i$  energiájú szintre kerül. Mivel a rendszer minden mikroállapota azonos valószínűséggel fordul elő, a valószínűségek aránya megegyezik a mikroállapotok számának arányával:

$$\frac{P(E_i)}{P(E_j)} = \frac{Y(E_i)}{Y(E_j)} = \frac{Y_1(E_i)Y_2(E_i)}{Y_1(E_j)Y_2(E_j)} = \frac{1 \cdot e^{S_i/k}}{1 \cdot e^{S_j/k}} = \frac{e^{S_i/k}}{e^{S_j/k}}. \quad (4.6)$$

A fenti kifejezésben  $Y_1(E_i)$  és  $Y_2(E_i)$  rendre az  $R_1$  és  $R_2$  rendszer azon mikroállapotainak számát jelöli, amelyben  $R_1$  energiája  $E_i$  (így  $R_2$ -é  $E - E_i$ ; a szorzás a független választások miatt használható). Mivel  $R_1$ -nek az  $E_i$ -k egy-egy energiaszintjét képviselik, ami egy mikroállapotnak felel meg,  $Y_1$  minden esetben 1 lesz.  $Y_2$ -t az entrópia (4.4) szerinti definícióját átrendezve kapjuk:  $S_i$  a hőtartály  $E - E_i$  energiához tartozó entrópiája.

Most  $S_i$ -t fogjuk meghatározni. Legyen  $S$  a hőtartály entrópiája, ha energiája  $E$ ; ekkor az entrópia (4.2) definíciója szerint

$$S_i = S + \Delta S_i = S + \frac{\Delta E_i}{T} = S - \frac{E_i}{T};$$

itt  $\Delta S_i$  azt az entrópia-,  $\Delta E_i$  pedig azt az energiaváltozást jelenti, ami a hőtartály energiájának  $E$ -ről  $E - E_i$ -re változását kíséri (nyilvánvalóan az energiaváltozás nem térfogati munka végzésével következik be, így a hőközlést tartalmazó definíció itt alkalmazható).

Helyettesítsük be ezt (4.6)-be:

$$\frac{P(E_i)}{P(E_j)} = \frac{e^{S/k - E_i/kT}}{e^{S/k - E_j/kT}} = \frac{e^{S/k} e^{-E_i/kT}}{e^{S/k} e^{-E_j/kT}} = \frac{e^{-E_i/kT}}{e^{-E_j/kT}}.$$

Eszerint annak a valószínűsége, hogy egy termodinamikai rendszer egy  $E$  energiájú mikroállapotot vegyen fel, arányos  $e^{-E/kT}$ -vel: ez a *Boltzmann-eloszlás* lényege; az exponenciális kifejezést *Boltzmann-faktornak* szokás nevezni. Mivel az összes mikroállapot létrejöttének valószínűségének összege 1, egy mikroállapot kialakulásának valószínűsége:

$$P(E_i) = \frac{e^{-E_i/kT}}{\sum_j e^{-E_j/kT}}, \quad (4.7)$$

ahol a nevező  $j$  indexe minden lehetséges mikroállapot-indexen végigfut: a nevezőt szokás *állapotösszegnek* nevezni.

A Boltzmann-eloszlást más irányból is megközelíthetjük. Tekintsük  $N \gg 1$  egyforma termodinamikai rendszert  $T$  hőmérsékletű környezetben, amelyek az  $E_i$  energiájú mikroállapotokat valószínűsíthetik meg. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az egyes rendszerek egy adott  $E_i$  mikroállapotban léteznek,  $P(E_i)$ , amelyet a 4.7. egyenlet szerint

számíthatunk ki. Mivel az egyes rendszerek által megvalósított mikroállapotok egymástól függetlenek, az  $E_i$  mikroállapot megvalósulásának számát binomiális eloszlás írja le: ennek várható értéke  $NP(E_i)$ , relatív szórása pedig  $N$ -nel csökken. Ha tehát  $N$  nagyon nagy, nagyon jó közelítéssel mondhatjuk, hogy az  $E_i$  mikroállapotot megvalósító rendszerek száma

$$N(E_i) = N \frac{e^{-E_i/kT}}{\sum_j e^{-E_j/kT}}. \quad (4.8)$$

Általában ezt az összefüggést nevezzük *Boltzmann-eloszlásnak*.

### Megjegyzések.

1. Ha egy  $E_i$  energiaszintet nem egy, hanem  $g_i$  mikroállapot valósít meg, a 4.7. és a 4.8. egyenletekben a Boltzmann-faktorokat értelemszerűen meg kell szorozni  $g_i$ -vel.
2. Elképzelhető, hogy a rendszer mikroállapotai nem diszkrét energiaszintekhez tartoznak (ez a helyzet például a szabadon mozgó gáZRészecskék esetén). Ekkor a diszkrét mikroállapotok helyét az *állapotsűrűség*-függvény ( $g(E)$ ) veszi át: ekkor az  $E$  és  $E+dE$  közti energiájú mikroállapotok száma  $g(E)dE$ . Ebben az esetben a Boltzmann-eloszlás is sűrűségfüggvénybe megy át, az állapotösszegben pedig az összeadást az integrálás váltja fel.
3. A Boltzmann-eloszlás szintén nagyon általános érvényű összefüggés. Ha bármilyen, energiatárolásra képes rendszer (amelyben a kvantumhatások elhanyagolhatók) termikus egyensúlyba kerül, a lehetséges energiaszintek Boltzmann-eloszlás szerinti gyakoriságban valósulnak meg. Az ilyen jellegű energiatárolást (gerjesztést) *termikus gerjesztésnek* nevezzük.

### 4.2.3. Ekvipartíció haladó mozgásokra

Az egyszerűség kedvéért most csak egy dimenzió mentén haladó mozgást végző molekulákat vizsgálunk (több dimenzió figyelembe vétele elvi nehézséget nem, inkább csak számolásit okoz). Legyen adott tehát  $N$  molekula, amely az  $x$ -tengellyel párhuzamosan mozog. Mélyebb megfontolásokkal (a dobozba zárt elektron modelljével – 5.1. fejezet) belátható, hogy  $v$  és  $v + dv$  közti sebességgel való mozgások azonos ( $dv$ -vel arányos) számú mikroállapotot jelentenek,  $v$ -től függetlenül, azaz a  $g(v)$  állapot-sűrűség-függvény konstans (az egyszerűség kedvéért 1-nek vesszük).

Mivel a  $v$  sebességgel mozgó molekulának  $E = \frac{1}{2}mv^2$  mozgási energiája van, a Boltzmann-faktor  $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$  lesz, az állapotösszeg pedig  $Z = \int_{v=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$ . A molekulánkénti átlagos energia kifejezése a következő lesz:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{Z} = \frac{m}{2Z} \int_{v=-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv. \quad (4.9)$$

(A mozgási energia utáni kifejezés annak a valószínűsége, hogy a részecske sebessége  $v$  és  $v + dv$  között van.) Kiszámítható, hogy az állapotösszeg

$$Z = \int_{v=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}, \text{ illetve, hogy}$$

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = \sqrt{\frac{2\pi k^3 T^3}{m^3}}.$$

Ezeket behelyettesítve (4.9)-be:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi k^3 T^3}{m^3}} = \frac{kT}{2}. \quad (4.10)$$

Ebben az esetben tehát az egy molekulára jutó átlagos energia  $\frac{1}{2}kT$ : *éppen ezt mondja ki az ekvipartíció tétele*. A Boltzmann-eloszlást felhasználva tehát levezethető az ekvipartíció.

#### 4.2.4. A félvezetők ellenállása

A kereskedelmi forgalomban könnyen beszerezhetők *termisztorok*: ezek félvezetőből készült ellenállások, amelyek ellenállása *csökken a hőmérséklettel*: számos digitális hőmérőben ilyen alkalmaznak jó hőtani és elektromos tulajdonságaik miatt. Most a félvezetők ellenállásának hőmérsékletfüggését fogjuk megvizsgálni.

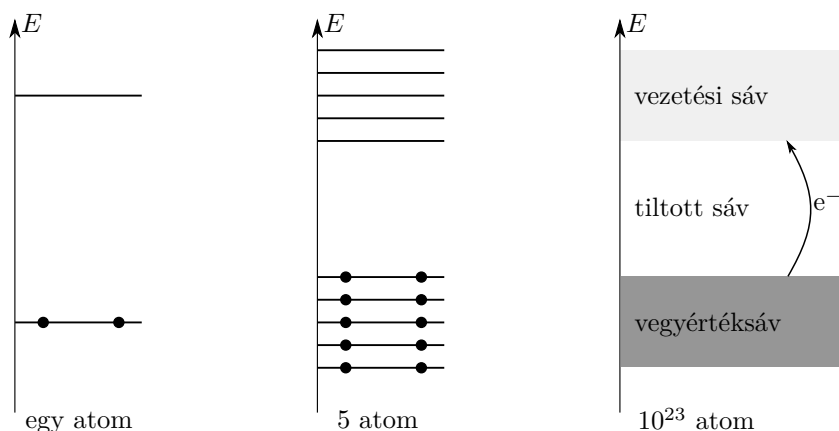
#### Néhány szó a félvezetők sávstruktúrájáról

Ismert tény, hogy az atomokban (és molekulákban) az elektronok csak jól meghatározott energiaszinteken tartózkodhatnak, egy ilyen szinten egyszerre maximum 2 elektron lehet (*Pauli-elv*). Ha több egyforma atomot teszünk egymás közelébe, azok kölcsönhatnak egymással, ezért energiaszintjeik közösek lesznek: emiatt és a Pauli-elv miatt az eredetileg azonos energiájú energiaszintek *felhasadnak*,  $N$  atom kölcsönhatásakor  $N$  közeli (kis energiakülönbségű) energiaszint jön létre. Ha  $N$  nagyon nagy (mondjuk  $10^{23}$ ), ezek az energiaszintek olyan közel kerülnek egymáshoz, hogy minden reálisan elképzelhető hőmérsékleten a  $kT$  nagyságrendű termikus gerjesztés jóval nagyobb, mint az energiaszintek közti különbség. Emiatt ezek az energiaszintek teljesen egybefolynak, együtt egy *vegyértéksávot* alkotnak. Egy ilyen sávba eső bármilyen energiájú elektron előfordulhat az anyagban (egy sávban  $2N$  elektron helyezkedhet el a Pauli-elv miatt).

Vezetők azok az anyagok, amelyek atomjaiban van párosítatlan elektron, azaz amelynek valamely energiaszintjén a lehetséges 2 helyett csak 1 elektron található. Az ebből az energiaszintből kialakuló sávban a lehetséges  $2N$  helyből  $N$  lesz elektronnal betöltve: ezek nyilván a kisebb energiájú helyek, viszont minimális gerjesztéssel (kis feszültség) ezek az elektronok a sávhoz tartozó bármelyik energiaszintre átkerülhetnek: ezt úgy értelmezhetjük, hogy ezek az elektronok szabadon elmozdulhatnak az anyagban, tehát ebben az anyagban a legkisebb feszültség is elektronáramlást (elektromos áram) indít meg.

Szigetelők azok az anyagok, amelyek atomjaiban (molekuláiban) nincs párosítatlan elektron. Ekkor minden sávon mind a  $2N$  helyet betöltik az elektronok: ebben az anyagban az elektronokat kis feszültséggel nem lehet gerjeszteni, nem indul meg töltésáramlás.

A félvezetők abban hasonlítanak a szigetelőkhöz, hogy minden, elektront tartalmazó sávjuk telített. A lényeges különbség, hogy van egy telített sáv (a *vegyértéksáv*),



4.2. ábra. A félvezetők sáv szerkezete

amelynél valamivel magasabb energián egy üres sáv (a *vezetési sáv*) is található: a két sáv közti energiakülönbséget nevezzük a *tiltott sáv szélességének*. Ebben a tiltott sávban nem helyezkedhet el az elektron, viszont átugorhatja (és a Boltzmann-eloszlás miatt át is ugorja), így bizonyos számú elektron eljut a vezetési sávba. Mivel a vezetési sávba került elektronok szabadon gerjeszthetők, azok már vezetni fognak. (Az elektronok helyén a vegyértéksávban üres helyek maradnak, ide gerjesztődhetnek a „lent maradt” elektronok, emiatt ott is vezetést tapasztalhatunk: ezt a jelenséget nevezik *lyukvezetésnek*.) A sáv szerkezetet a 4.2. ábra mutatja be.

### Az ellenállás hőmérsékletfüggése

Szemléletesen nyilvánvaló (és le is vezethető), hogy a vezetési sávban az elektronok vezetése arányos az ott tartózkodó elektronok számával, a vegyértéksávban a lyukvezetés pedig a lyukak számával lesz arányos. A két szám nyilván egyenlő, tehát a félvezető vezetése (ami az ellenállás reciproka) arányos a vezetési sávba átjutó elektronok számával.

A legegyszerűbb közelítésben az elektron kétféle energiaszinten lehet: a vegyértéksávban, illetve az annál a tiltott sáv  $\Delta E$  szélességével magasabb energiájú vezetési sávban. A Boltzmann-eloszlás szerint a vezetési sávba feljutó elektronok száma (legyen  $N$  a sávban levő elektronok összes száma)  $N \exp(-\Delta E/kT)/(1 + \exp(-\Delta E/kT)) \approx N \exp(-\Delta E/kT)$ , mivel hétköznapi hőmérsékleteken  $kT \ll \Delta E$ , így  $\exp(-\Delta E/kT)$  elhanyagolható az 1 mellett. A vezetési sáv elektronjainak száma tehát  $\exp(-\Delta E/kT)$ -vel arányos, ugyanígy függ az ellenállás reciproka a hőmérséklettől. Maga az ellenállás tehát a Boltzmann-faktor reciprokával,  $\exp(\Delta E/kT)$ -vel arányos:

$$R(T) = R_{\infty} e^{\Delta E/kT}, \quad (4.11)$$

ahol  $\Delta E$  a félvezető tiltott sávjának szélessége,  $R_{\infty}$  pedig a  $T \rightarrow \infty$  határesetben mérhető, ún. *maradék ellenállás*: a mérési adatok is megerősítik ezt az összefüggést

a hétköznapi hőmérsékletek tartományában (nagyon magas hőmérsékleten némileg összetettebb számításra lenne szükség).

### 4.2.5. Feladatok

#### †1. feladat.

Egy  $D = 10$  N/m rugóállandójú rugóra  $m = 1$  kg tömegű testet akasztunk. Mekkora hőmérsékleten lesz a rezgés várható amplitúdója  $A = 1$  mm? (Tegyük fel, hogy a rugó és a test is bármekkora hőmérsékletet kibír. Hanyagoljuk el a sűrűlódást.)

#### †2. feladat.

Egy  $L = 20$  mH-s tekercsből és egy  $C = 470$  nF-os töltetlen kondenzátorból zárt áramkört készítünk (az ohmos ellenállást elhanyagolhatjuk), majd azt egy  $T = 300$  K hőmérsékletű szobában helyezük el. Mekkora lesz a rezgőkör feszültségének várható effektív értéke?

#### 3. feladat.

Hogyan függ a levegő sűrűsége a magasságtól nehézségi erőterben? (A nehézségi gyorsulás és a hőmérséklet nem függ a magasságtól.)

#### †4. feladat.

*Kristálynak* nevezzük az olyan szilárd anyagot, amelyben az atomok hosszútávú, szabályos rend szerint helyezkednek el; *rácshibának* pedig az ettől a rendtől való eltéréseket a kristályban. A legegyszerűbb rácshiba a *vakancia*, amikor az addig a kristályrácsban elhelyezkedő atom a kristály felszínére diffundál: eközben a felületre kerülő atom energiája megnő egy, az anyagi minőségre jellemző (néhány eV nagyságrendű) értékkel. A vakanciák és az összes atomok számának hányadosát *vakanciakoncentrációnak* nevezzük.

300 K-es vörösrézben a vakanciakoncentráció  $4,7 \cdot 10^{-16}$ . Határozzuk meg a vakanciakoncentrációt 500 K-en.

#### †‡5. feladat.

(a) Bizonyítsuk be a Boltzmann-eloszlás felhasználásával, hogy elég nagy hőmérsékleteken igaz az ekvipartíció tétele harmonikus oszcillátorra. (Használjuk ki, hogy a harmonikus oszcillátor energiaszintjei diszkrét.)

(b) Mekkora ez az „elég nagy” hőmérséklet?

#### †‡6. feladat.

A dobozba zárt elektron tulajdonságaiból (l. 5.1. fejezet) vezessük le, hogy ideális gázra a  $v$  és  $v + dv$  közti  $x$ -sebességkomponensű mikroállapotok száma arányos  $dv$ -vel. (*Segítség:* mivel a doboz nagyméretű, a szomszédos mikroállapotok közti energiakülönbség nagyon kicsi.)

#### †‡7. feladat.

$N$  darab elhanyagolható tömegű láncszemből láncot építünk, amelynek végére egy  $M$  tömegű testet akasztunk. A lánc minden egyes szemének két lehetséges állása van: az egyikben a láncszem függőleges hossza  $d - a$ , a másikban  $d + a$ .

(a) Mennyi a lánc várható hossza és a rendszer energiája  $T$  hőmérsékleten? (A helyzeti energia nullszintjét vegyük a lánc felső rögzítési pontjában.)

(b) Mennyi a rendszer hőkapacitása  $T$  hőmérsékleten?



**‡8. feladat.**

Mérjük meg egy termisztor ellenállását a hőmérséklet függvényében és határozzuk meg a tiltott sáv szélességét.

## 5. fejezet

# Atomfizika

### 5.1. Kötött állapotú elektron vizsgálata

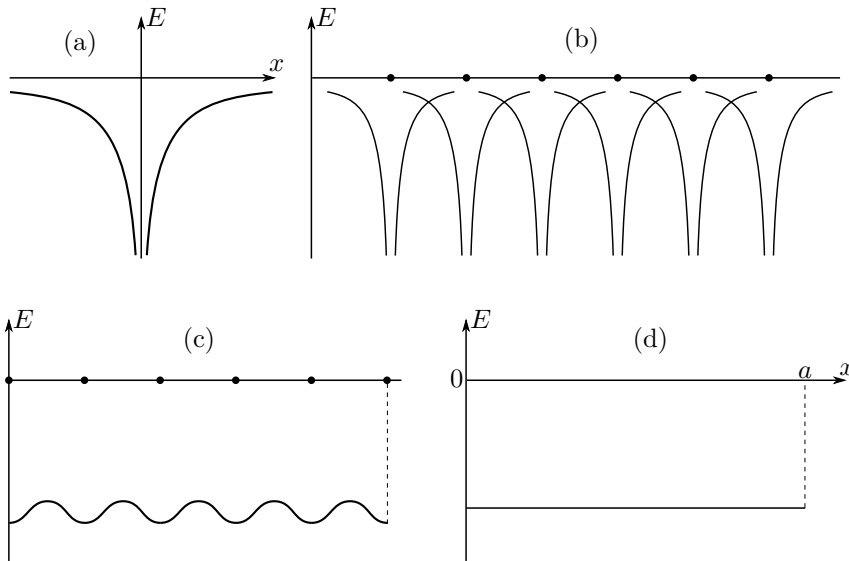
#### 5.1.1. Kötött elektron láncmolekulában

A láncmolekulában delokalizált elektronok mozognak a pozitív atomtörzsek elektromos terében. Az elektronok ekkor kötött állapotban vannak. Összes energiájuk negatív, ami azt jelenti, hogy a kötési energia miatt nem hagyhatják el a molekulát. Az állapot leginkább egy gödörbe esett tárgyhoz hasonlít: a gödör peremének helyzeti energiaszintjét 0-nak tekintjük, így, ha az összenergia negatív, a gödör peremére érve nem lenne mozgási energiája a tárgynak, így az nem juthat ki a gödörből. Az elektron is ilyen „potenciálgödörben” található.

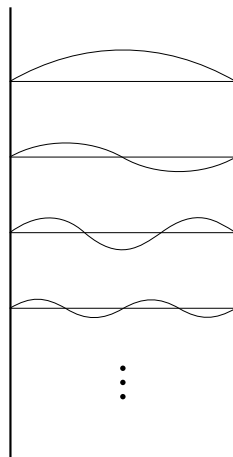
Az összenergia *potenciális* és *mozgási* energiából áll. Az összenergia negatív, a mozgási pedig pozitív, így a potenciális energia negatív kell legyen. A potenciális energiát az atomtörzsek elektromos tere biztosítja. Az 5.1. ábra ezt mutatja. Az (a) ábrarész egy pozitív töltés terében az elektron elektromos potenciális energiáját ábrázolja (ez  $\frac{1}{x}$ -szel arányos). A (b) ábrarészen több ilyen töltést helyezünk egymás mellé, mind-egyiket a saját potenciáletterével. A (c) ábrarészen ezeket „adjuk össze” grafikusán, egyben hozzávesszük az atomtörzsek elektronjainak potenciálját is. Ez a potenciáltér így már csak kissé „hullámos”, azonban a számíthatóság végett úgy tekintjük, hogy a molekulában az elektronra ható potenciál egy  $a$  hosszúságú szakaszon *állandó és negatív*, azon kívül 0 nagyságú ((d) ábrarész).

Az állandó potenciáltér miatt az elektron nem gyorsul, lendülete, így hullámhossza állandó, ez az *állóhullám-modell*. Az állóhullám-modell azt fejezi ki, hogy az állapotfüggvény molekulán kívül 0, azon belül pedig állandó  $\lambda$  hullámhosszú. Mivel a molekula határán az állapotfüggvény értéke 0, a molekula  $a$  hossza a fél hullámhossz ( $\frac{\lambda}{2}$ ) egész számú többszöröse, mivel a függvény 0 értékei (*csomópontok*) ilyen gyakorisággal térnek vissza, l. 5.2. ábra.

Általában megállapíthatjuk, hogy  $a = (k + 1)\frac{\lambda}{2}$ , azaz  $\lambda = \frac{2a}{k+1}$ ; itt  $k$  a belső csomópontok száma; az állapotfüggvény  $\Psi_k(x) = A \sin\left((k + 1)\pi\frac{x}{a}\right)$ .



5.1. ábra. Láncmolekula potenciáltere



5.2. ábra. Állóhullámok

A mozgási energia ekkor:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2}{8ma^2}(k+1)^2,$$

azaz  $E_k = \frac{h^2}{8ma^2}(k+1)^2$ , ahol  $k \in \mathbb{N}$ .

**Megjegyzés.** A mozgási energiák diszkrét sorozatot alkotnak:

$$k = 0 \text{ (alapállapot): } E_0 = \frac{h^2}{8ma^2}$$

$$k = 1 \text{ (1. gerjesztett állapot): } E_1 = 4E_0 \dots$$

Ha az elektron alacsonyabb energiájú állapotba kerül, az energiakülönbséget elektromágneses sugárzás formájában kisugározza, amire a  $hf = \Delta E$  egyenlőség áll fenn. Az elektron ilyen frekvenciájú elektromágneses hullámmal gerjeszthető is.

**Következmények.**

1. A diszkrét energiaszintek megmagyarázzák az anyagok vonalas színeképét.
2. A látható fény energiataromány kb. 0,25–0,5 aJ, számos láncmolekulás anyag ilyen frekvenciájú sugarakat is elnyel. Például a sárgarépa 22 szénatomos karotin láncmolekulájának hossza  $a = 1,86$  nm. A láncmolekulában 22 delokalizált elektron helyezkedik el, ami alapállapotban teljesen betölti az első 11 energiaszintet, így a molekula legkevésbé gerjesztett állapota az, ha az egyik elektron a 11. energiaszintről a 12.-re kerül. Ebből a gerjesztett állapotról az alapállapotra váltás energiakülönbsége  $\Delta E \approx 0,43$  aJ, ami a kék fény hullámhosszának felel meg. A karotin tehát a kék fényt elnyeli, annak komplementerét, a narancssárgát visszaveri. Az anyagi világ színességéért részben a hosszú láncmolekulák felelősek.

### 5.1.2. Kötött elektron téglalapban

A potenciáletteret most síkban vizsgáljuk, ahol csak egy téglalapban negatív a potenciális energia, azon kívül 0. A csomópontokhoz hasonlóan most *csomóegyenesekről* beszélhetünk. Ezt nehéz ábrázolni, azonban az egyes oldalakkal párhuzamos metsző egyeneseken – ha azok maguk nem csomóegyenesek – csomópontként jelennek meg. Legyen a téglalap két oldala  $a$  és  $b$ , az ezen oldalakat átmetsző belső csomóegyenesek száma  $k_a$  és  $k_b$ . A két oldallal párhuzamos állóhullámok hullámhosszai  $\lambda_a = \frac{2a}{k_a+1}$  és  $\lambda_b = \frac{2b}{k_b+1}$ , az állapotfüggvény  $\Psi_{k_a, k_b}(x, y) = A \sin\left((k_a+1)\pi\frac{x}{a}\right) \sin\left((k_b+1)\pi\frac{y}{b}\right)$ , az összes mozgási energia:

$$E_{k_a, k_b} = \frac{p_a^2}{2m} + \frac{p_b^2}{2m} = \frac{h^2}{8m} \left[ \left(\frac{k_a+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_b+1}{b}\right)^2 \right] \quad (k_a, k_b \in \mathbb{N}).$$

Speciális esetek:

$$k_a = k_b = 0 \text{ (alapállapot): } E_{0,0} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$1. \text{ gerjesztett állapotok: } \begin{cases} k_a = 0, k_b = 1 : E_{0,1} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right) \\ k_a = 1, k_b = 0 : E_{1,0} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \end{cases}$$

A lehetséges energiaértékek itt is diszkrét sorozatot alkotnak.

**Megjegyzés.** Ha  $a = b$ ,  $E_{0,1} = E_{1,0}$ , szimmetrizált állapotokat találunk. Jellemzően azonban  $a \approx b$ , így  $E_{0,1} \approx E_{1,0}$ , az egybeeső energiaszintek „felhasadnak”. Például: a levél

zöld színéért a klorofill a felelős, ami egy majdnem szimmetrikus molekula: az  $E_{0,1}$  és  $E_{1,0}$  szintek közti energiakülönbség 0,22 aJ, ami a vörös fény energiájának felel meg. A klorofill tehát a vörös fényt elnyeli, így a visszavert fényből a vörös szín hiányzik, ezért azt zöldnek látjuk.

### 5.1.3. Kötött elektron téglatestben

Az előző levezetéshez teljesen analóg módon egy  $a, b, c$  élű téglatestbe zárt elektron mozgásienergia-szintjei

$$E_{k_a, k_b, k_c} = \frac{\hbar^2}{8m} \left[ \left( \frac{k_a + 1}{a} \right)^2 + \left( \frac{k_b + 1}{b} \right)^2 + \left( \frac{k_c + 1}{c} \right)^2 \right] \quad (k_a, k_b, k_c \in \mathbb{N}),$$

állapotfüggvényei

$$\Psi_{k_a, k_b, k_c}(x, y, z) = A \sin \left( (k_a + 1) \pi \frac{x}{a} \right) \sin \left( (k_b + 1) \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left( (k_c + 1) \pi \frac{z}{c} \right)$$

szerint adódnak.

### 5.1.4. Feladatok

#### 1. feladat.

Egy  $m$  tömegű részecske szabadon mozoghat egy  $d$  hosszúságú „egydimenziós dobozban”.

- (a) Hol található legnagyobb valószínűséggel meg a részecske  $k = 0$  és  $k = 1$  esetén?  
 (b) A részecske legyen elektron. Számítsuk ki a két legalacsonyabb energiájú állapot energiakülönbségét  $d$  következő értékeire: 0,3 m; 0,3 mm; 30 nm; 0,3 nm. Melyik hosszúságértéknél látszik a legjobban, hogy az elektron energiaszintjei diszkréték?

#### 2. feladat.

Egy elektron olyan „két-dimenziós dobozban” helyezkedik el, amely kétszer olyan hosszú, mint amilyen széles. Keressük meg a két legalacsonyabb energiájú azonos energiájú állapotot (azaz, amikor két eltérő csomósíkszám-párral azonos energiája lesz az elektronnak).

#### 3. feladat.

Egy részecske egy  $\ell$  oldalhosszúságú kockába van bezárva. Adjuk meg a 10 legalacsonyabb energiájú állapotot és energiájukat.

#### 4. feladat.

Tegyünk három elektront gondolatban egy  $\ell = 10$  nm élű kockába. Mekkora lesz az összes mozgási energiájuk alapállapotban?

#### 5. feladat.

Mekkora legkisebb energiával lehet gerjeszteni az előző feladatban szereplő rendszert?

#### ‡6. feladat.

10 elektront olyan négyzet alapú hasábra zárunk, amelynek magassága alapélének nyolcszorosa. A hasábot a térfogat megváltoztatása nélkül kockává deformáljuk. Energia szabadul-e fel, vagy nekünk kell munkát végeznünk?

**7. feladat.**

Adott igen sok, alapállapotú,  $a = 1,358$  nm hosszúságú láncmolekula, amelyekben 1-1 elektron található. Legalább mekkora frekvenciájú sugárzással lehet látható fény kibocsátására bírni a rendszert? Milyen színű lesz a kibocsátott fény?

**5.2. Atommodellek**

**A klasszikus görög kép:** atom – ἄτομος, oszthatatlan, struktúra nélküli; mégis az arisztotelészi folytonos anyagszemlélet volt az uralkodó.

A 19-20. század fordulóján számos kísérleti tény utalt arra, hogy az atom valójában *nem* oszthatatlan:

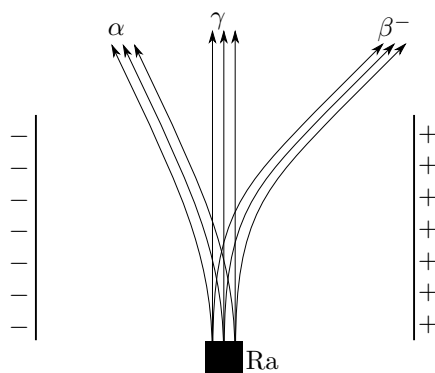
- A periódusos rendszer (1869, *Mengyelejev*): a rendszer alapját az adja, hogy különböző elemek kémiai tulajdonságai az atomsúly növekedésével szakaszosan visszatérnek. Úgy gondolták, hogy a periódusos rendszer törvényszerűségeinek magyarázata az atomok szerkezeti tulajdonságaiban keresendő, segítségével felgyorsult a még ismeretlen elemek megtalálása.

**A fizika négy aranyéve:**

- 1895: *Conrad Röntgen* (német, Nobel-díj: 1901) a katódsugarakat vizsgálva (véletlen – fluoreszkáló só) felfedezte a röntgen- (X-) sugárzást. Nagyon hamar, már fél év múlva megtörtént az orvosi alkalmazása.
- 1896: *Henri Becquerel* (francia, Nobel-díj: 1903) a természetes radioaktivitás felfedezése. Az uránérc előzetes besugárzás nélkül is bocsátott ki nagy áthatoló képességű sugarakat, amelyek a fényhez hasonlóan megfeketítették a fényképezőlemezt. *Külső hatás nélkül keletkezik*, erőssége az elem mennyiségétől függ, fizikai és kémiai változások nem befolyásolják, kémiai hatása van, megfeketíti a filmet, ionizáló hatása van, az élő sejtet károsítja, fluoreszkálást, foszforeszkálást okoz.

*Ernest Rutherford* a radioaktív anyagból kilépő sugarakat elektromos mezőbe vezette, a sugárzásban három összetevőt figyelt meg (lásd 5.3. ábra).

- 1897: A szabad *elektron* felfedezése – *J. J. Thomson* (angol, Nobel-díj: 1906) az elektron fajlagos töltését határozta meg tömegspektroszkópiával.
- 1898: A *Curie* házaspár felfedezi a polóniumot és a rádiumot. A Curie házaspár és Becquerel együtt kapták meg a fizikai Nobel-díjat a radioaktív sugárzás kutatásáért. A polónium és a rádium felfedezéséért Marie Curie 1911-ben kémiai Nobel-díjat kapott.



5.3. ábra. A három sugárzástípus

### 5.2.1. Az első atommodellek

**Megjegyzés.** Színkép (spektrum): prizmával vagy ráccsal hozható létre a diszperzió (a törésmutató hullámhosszfüggése) vagy a diffrakció (elhajlás) jelenségét felhasználva.

A színkép lehet *folytonos* (nagynyomású gázok, izzószál) vagy *vonalas* (gázkisülés kisnyomású gázokban).

Atomos anyag (gázok, gőzök) színképe lehet (l. 5.4. ábra)

- kibocsátási (emissziós) színkép: a forró gázok által kibocsátott fényben csak bizonyos frekvenciák fordulnak elő – a felfogó ernyőn színes vonalak jelennek meg ((a) ábrarész);
- elnyelési (abszorpciós) színkép: ha egy jó közelítéssel fekete test (pl. ívfény, napfény) fényét hideg gázon vezetjük át, a folytonos színképben sötét vonalak jelennek meg. Amely frekvenciájú fényt a gáz elnyeli a fehér fényből, azt ki is bocsátja, ha izzítjuk ((b) ábrarész). Ez fordítva nem igaz: mivel a szobahőmérsékletű gázok molekulái szinte mind alapállapotban tartózkodnak, az elnyelési színképben csak az onnan kiinduló szintlépéseknek megfelelő frekvenciák jelennek meg; a kibocsátási színképben viszont bármely két energiaszint közötti ugrásnak megfelelő foton is megjelenthet.

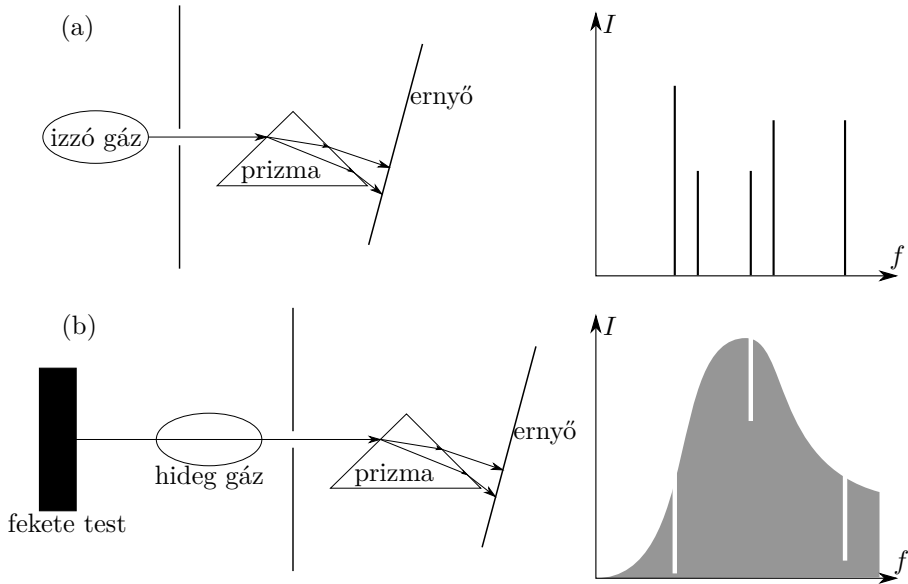
### Thomson-modell – „mazzolás puding” (1904)

A Thomson-féle atommodell, avagy a „mazzolás puding”-modell szerint az atomban egyenletesen oszlik el a tömeg nagy része, amely pozitív töltésű, és abban mozognak a kis tömegű elektronok.

A Thomson-modellt *Phillip Lenard* (Lénárd Fülöp) magyar származású német fizikus cáfolta meg, aki elektronokkal bombázott egy fémfóliát, amin eltérülés nélkül haladtak át az elektronok, tehát az atom *nem lehet tömör*.

A modellt Ernest Rutherford aranyfólián végzett szórás kísérlete döntötte meg véglegesen, ami kimutatta, hogy az atom tömegének nagy része koncentráltan helyezkedik el. Ezt a koncentrációkat ma atommagnak hívjuk.

A modell magyarázza a semleges atom és az ionok létét, valamint a katódsugárzást, viszont nem magyarázza a vonalas színképet és Rutherford kísérletét.



5.4. ábra. Emissziós és abszorpciós színekép

### Rutherford-modell (1911)

A szórási kísérlet:  $\alpha$ -részecskék áthaladását vizsgálta nagyon vékony aranyfólián. Azt tapasztalta, hogy a sugárzás döntő része akadálytalanul áthaladt a fólián. Néhány esetben a becsapódó részecske látszólag visszapattant a fóliáról: ez a jelenség ellentmond a Thomson-féle képnek, abban ugyanis semmilyen olyan koncentrált töltés sincs, amely erre képes lenne.

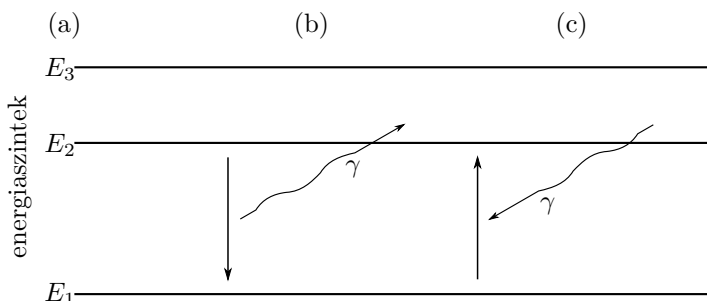
Az új modell: az atom pozitív töltése az atom közepén „kicsiny magban” (*nucleus*) helyezkedik el. A magban koncentrálódik az atom csaknem teljes tömege, ami körül keringenek az elektronok. Ez a „parányi Naprendszer”-modell.

Méretük: atom –  $10^{-10}$  m, atommag –  $10^{-14}$  m.

#### Hiányosságok.

- Nem magyarázza a vonalas színeképet: az atom energiája tetszőleges lehet – akárcsak a Thomson-modell esetében.
- Ellentmond az elektromágneses sugárzás elméletének. A „Rutherford-atom” nem lehet stabil. A modell szerint az elektronok ellipszispályákon keringenek a mag körül, mint a bolygók a csillag körül. Eszerint az elektronoknak centripetális gyorsulásuk van, emiatt elektromágneses energiát kellene kibocsátaniuk, folyamatosan veszíteniük kellene az energiájukból, míg a magba nem zuhannának. A tapasztalat szerint az atomok szerkezete nem változik meg magától.





5.5. ábra. A Bohr-posztulátumok

### 5.2.2. Bohr-modell (1913)

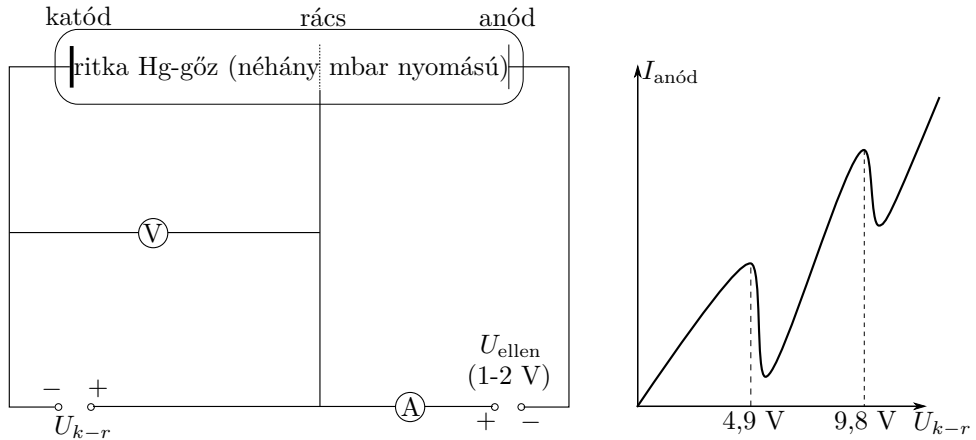
A modell posztulátumokra épül, ezeket az 5.5. ábra mutatja be:

1. Az atomban az elektronok csak meghatározott energiájú állapotokban tartózkodhatnak stacionáriusan (időben állandó módon) (a). Ekkor nem sugároznak. Ezeken a szinteken az elektron perdulata  $L = n\hbar$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (ez az ún. *Bohr-Sommerfeld-féle kvantumfeltétel*, amely a kvantummechanikai jelenségek még szélesebb osztályát is magyarázza).
2. Az elektronok akkor sugároznak, ha az egyik energiaszintről átugranak a másikra (b). A sugárzás frekvenciája:  $f = \frac{|\Delta E|}{h}$ , ahol  $h$  a Planck-állandó; ez a *frekvenciafeltétel*. Ha a frekvenciafeltételt kielégítő sugárzás éri az elektront, akkor az elnyeli az energiát és egy magasabb energiaszintre kerül (c).

### Franck–Hertz-kísérlet (1913): a Bohr-posztulátumok kísérleti igazolása

A kísérlet elrendezését és a mérési eredmények vázlatos grafikonját az 5.6. ábra mutatja be. Érdekes, hogy az anódáram bizonyos feszültségeknél leesik. Ez abból adódik, hogy a katódból induló elektronok nem jutnak el az anódig.

*Az anódáram leesésének értelmezése:* kis  $U_{k-r}$  esetén csak rugalmas ütközés lehetséges az elektronok és a csőben levő higanyatomok között. Ebben az elektron, mivel sokkal könnyebb a higanyatomnál, alig veszít energiát, és átjut az ellentéren is. Ha azonban az elektront gyorsító feszültség 4,9 V fölé emelkedik, a rugalmatlan ütközés is lehetségessé válik: az atom egy elektronja (egy 4,9 eV-tal) magasabb energiaszintre kerül, ezt a vele ütközött elektron mozgási energiájának csökkenése fedezi; például, ha a kezdeti energia 5,5 eV, akkor az ütközés után az elektronnak 0,6 eV mozgási energiája marad, amit az ellentér már felemésztt, ez magyarázza az anódáram leesését. Az anódáram 4,9 V többszöröseinél is visszaesik, mivel egy elektron több higanyatommal is ütközhet ugyanígy. (Az anódáram leesésével párhuzamosan a higanygőz „fénylését” is megfigyelték: mivel a 4,9 eV energiához tartozó frekvencia az ultraibolya tartományba esik, ezt a „fényt” csak segédeszközzel lehet kimutatni; a mai fénycsövek lényegében ugyanilyen csövek, fluoreszkáló bevonattal.)



5.6. ábra. A Franck-Hertz kísérlet

### A hidrogénatom Bohr-modellje

A Bohr-posztulátumok arról szólnak, hogy az atomban bizonyos energiaszinteken az elektronok stacionáriusan tartózkodhatnak anélkül, hogy sugároznának, illetve, hogy akkor sugároznak, ha az egyik ilyen energiaszintről egy másikra „ugranak át”. Arról azonban nem szólnak, hogy hogyan lehet ezeket az energiaszinteket meghatározni. A kvantummechanikát megelőzően csak a hidrogénatomra sikerült ezt elérni.

*Balmer*, egy svájci középiskolai fizikatanár, 1885-re kísérletei eredményeként a hidrogén színképeinek vonalaira a következő összefüggést találta:

$$f = R^* \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

Balmer ezt nem ilyen alakban írta le, de ma már így fogalmazzuk meg. A legmeglepőbb az volt, hogy az egyenlet a későbbi, pontosabb kísérletek során is megállta a helyét, az  $\frac{1}{4}$  mindig pontosan  $\frac{1}{4}$  maradt. Ezt *Rydberg* is alátámasztotta.  $R^*$  a *Rydberg-állandó*, értéke:  $R^* \approx 3,29 \cdot 10^{15}$  Hz.

A jelenség szélesebb körű magyarázatával 1913-ban a Bohr-féle kvantumfeltétel próbálkozott; ez azt mondta ki, hogy a hidrogénatomban az elektron körpályán kering, amely körpályán az elektron perdülete:

$$L = n\hbar \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

**Megjegyzés.** A de Broglie-feltevés szerint az elektron hullámhossza:  $\lambda = \frac{h}{mv}$ . Az elektron csak akkor nem kerül a pályán kioltó interferenciába önmagával, ha a pálya kerülete pontosan  $e$  hullámhossz egész számú többszöröse:  $2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv}$ , azaz  $r = \frac{n\hbar}{mv}$ . A perdület:  $L = mvr = mv \frac{n\hbar}{mv} = n\hbar$ , ez ad magyarázatot a Bohr-féle kvantumfeltételre. (Bohr más, bonyolultabb megfontolásokból kiindulva vezette le a kvantumfeltételt.)

A klasszikus fizika szerint az elektront a körpályán az atommag és a közte fennálló Coulomb-vonzás tartja körpályán. Az elektrorra ható erő:

$$F = k \frac{Ze \cdot e}{r^2},$$

ez a Coulomb-erő törvénye,  $Ze$  az atommag,  $e$  az elektron töltése,  $r$  a köztük lévő távolság (a pálya sugara). Ez fedezi az elektront pályán tartó centripetális erőt:

$$F = m \frac{v^2}{r}.$$

A két erőt egyenlővé téve:

$$k \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (5.1)$$

Felszorozva  $r^2$ -tel, és figyelembe véve a kvantumfeltételt ( $L = mvr$ ):

$$\begin{aligned} kZe^2 &= mvr \cdot v = n\hbar v. \\ v &= \frac{kZe^2}{n\hbar}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

és a kvantumfeltételből:

$$r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{m \frac{kZe^2}{n\hbar}} = \frac{n^2 \hbar^2}{mkZe^2}. \quad (5.3)$$

Ez az elektron sebessége és pályasugara. A hidrogénatom esetén  $Z = 1$ , de az egyenlet minden más egyelektronos ionra is igaz, ám ekkor  $Z \neq 1$ .

Most határozzuk meg az elektron energiáját. Ez a mozgási ( $T$ ) és a potenciális ( $V$ ) energia összege:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r}. \end{aligned}$$

A potenciális energia negatív, ugyanis az atommag és az elektron között vonzó kölcsönhatás áll fenn. Az 5.1. egyenletet felhasználva:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2;$$

általában is igaz, hogy ilyen jellegű ( $F \sim \frac{1}{r^2}$ ) erőterben a körpályán mozgó test energiája ellentettje a mozgási energia időátlagának (*virialtétel*). Ebbe behelyettesítve 5.2-t, kapjuk:

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{m}{2} \frac{k^2 Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2}. \quad (5.4)$$

Ha  $Z = 1$ , és  $E^* = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2}$ , akkor  $E = -\frac{E^*}{n^2}$ , ahol  $E^* = 2,18$  aJ.

Vizsgáljunk egy olyan átmenetet, amikor az  $m$ . szintről az  $n$ . szintre történik az átmenet. A 2. Bohr-posztulátum ebben az esetben:

$$f_{m \rightarrow n} = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_m - E_n}{h},$$

ebbe  $E_m$  és  $E_n$  adott értékeit helyettesítve, és összevonva:

$$f_{m \rightarrow n} = \frac{E^*}{h} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (5.5)$$

Ekkor ellenőrizhetően fennáll az  $\frac{E^*}{h} = R^*$  összefüggés.

Balmer a XIX. század technikájával csak a látható fény tartományába eső átmeneteket tudta vizsgálni, ilyenkor  $n$  éppen 2-vel egyenlő, így pont visszakapjuk Balmer formulájának  $\frac{1}{4}$  törtjét. Nem csoda tehát, hogy ilyen jól kiállta az idő próbáját a formula. Az átmenet történhet  $n = 1$  vagy  $n = 3$  pályára is, ezt *Lyman* és *Paschen* vizsgálta.

A hidrogénatom fő színekpvonal-sorozatai:

$$\text{Lyman-sorozat: } f_{m \rightarrow 1} = R^* \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{Balmer-sorozat: } f_{m \rightarrow 2} = R^* \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

$$\text{Paschen-sorozat: } f_{m \rightarrow 3} = R^* \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 4, 5, 6, \dots$$

A Bohr-modell

*előnye:* a frekvenciákat igen pontosan megadja, érthetővé teszi a vonalas színeképet;

*hátrányai:* önkényes a kvantumfeltétel (a megjegyzés ellenére is);

korong alakú hidrogénatom a valóságos gömb helyett;

más atomra nem működik;

a perdületet is rosszul adja meg;

nem ad magyarázatot a színekép finomszerkezetére.

Ma a Bohr-modell túlhaladottnak tekinthető, azonban egyszerűsége miatt ma is hasznos az atomfizika tanításában.

### 5.2.3. Kvantummechanikai atommodell – dióhéjban

A Bohr-modell azért dőlt meg, mert a hidrogénénél összetettebb atomokat rosszul írja le, sőt, a hidrogénatomnak is léteznek olyan energiaszintjei, amelyek a Bohr-modell segítségével megmagyarázhatatlanok. Ezt próbálta „foltozni” – nem túl sok eredménnyel – a *Bohr–Sommerfeld-modell*. A probléma megoldását a kvantummechanika szolgáltatja. Az atomban létező elektronállapotokat, mint hullámfüggvénnyel értelmezett kvantumrészecskéket a *Schrödinger-egyenlet* megoldásaiként kapjuk. A megoldás részleteiben most nem mélyülünk el, inkább a modell eredményeire szorítkozunk. Az egyszerűség kedvéért a leírást a hidrogénatomra végezzük el.

A hidrogénatom alapvetően – az atommag Coulomb-ereje miatt – gömbszimmetrikus szerkezetű. Ilyen erőterben a már vizsgált *csomósíkok* mellett *csomógömbök* is megjelennek. A hidrogénatom egy-egy pályáját egy gömb alakú „dobozba” zárva képzelhetjük el. A leírás során az atompályákat három paraméterrel, *kvantumszámmal* jellemezhetjük:

1.  $n$  – főkvantumszám: az atompálya méretét határozza meg. Kiszámítható az összes csomófelületek (csomósík, csomógömb) számaként, plusz 1. Alapvetően befolyásolja az atompálya energiáját, a már a Bohr-modellben levezetett egyenlet szerint. Értéke tetszőleges pozitív egész szám lehet.
2.  $\ell$  – mellékkvantumszám: az atompálya térbeli alakját határozza meg. A csomósíkok számával egyezik meg. A mellékkvantumszám a pálya perdületét adja meg:  $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ .  $\ell$  értéke  $n$ -nél kisebb természetes szám lehet. Egy elektronos rendszerben (hidrogénatomban) az atompályák energiája *nem függ  $\ell$  értékétől*. Ha viszont az atommag körül sok elektron kering, az elektron atommagközelből kiszorulása befolyásolja a pályae energiát. Ez adja meg a kémiából ismert, az alapállapotú atom pályáinak feltöltődését leíró  $n + \ell$  szabályt: az atompályák közül az alacsonyabb  $n + \ell$ -lel,  $n + \ell$  azonos értékei esetén az alacsonyabb  $n$ -nel jellemezhetőek töltődnek be először.
3.  $m$  – mágneses kvantumszám: az atompálya alakjának finomszerkezetét, irányítottágát adja meg. A mágneses kvantumszám abszolút értéke megadja egy kitüntetett iránnyal párhuzamosan álló csomósíkok számát, előjele pedig a csomósíkok állását (ha külső mágneses tér van jelen, a kitüntetett irány e tér iránya lesz). Az atompálya perdületének a kitüntetett irányba eső vetületét is megadja: ez  $m\hbar$  nagyságú. A mágneses kvantumszám az  $[-\ell; \ell]$  intervallumba eső egész szám lehet.

A kvantummechanikai atommodell sok olyan dolgot nem használ ki, amit a Bohr-modell alapfeltevésként kezelt, és amely csak a hidrogénre igaz. Így a kvantummechanikai atommodell könnyedén kiterjeszthető nagyobb atomokra is, változást csak az elektronok egymás közti Coulomb-taszítása okoz. Ezt a közel azonos energiájú energiaszintek „felhasadásában” vehetjük észre (pl. a nátrium sárga vonala).

Az elektronok pályákon való elhelyezkedését az *energiaminimum-elv*, a *Pauli-elv* és a *Hund-szabály* írja le.

1. Az energiaminimum-elv a mikro- és a makrofizikában egyaránt érvényes törvény: minden test a számára lehetséges legalacsonyabb energiájú állapotba akar jutni: ez a termodinamika II. főtételenek következménye. Az energiaminimum-elv gyakorlati megvalósulását az atom belsejében az  $n + \ell$  szabály írja le.
2. A Pauli-elv a kvantummechanika alapvető törvénye: két egyforma állapotú anyagi részecske nem létezhet. Az atomban az elektronok állapotát a hullámfüggvény, azaz a három kvantumszám, valamint az elektron saját perdülete (spinje) határozza meg. Az elektron spinjének abszolút értéke  $\frac{\hbar}{2}$ , és a mágneses kvantumszámnál említett kitüntetett irányba áll. Így az elektron spinjét irányítással együtt

egy  $\pm \frac{1}{2}$  nagyságú *spinvetület-kvantumszámmal* adhatjuk meg – ez a később tárgyalandó nukleonokra is érvényes. Így a Pauli-elv atomban, atommagban és minden egyéb, elektront vagy nukleont tartalmazó rendszerben a következőképpen fogalmazható át: egy hullámfüggvénnyel leírható állapotban két részecske tartózkodhat, ezek spinje azonban különböző.

3. A Hund-szabály az atom saját törvénye: azonos energiaszintű állapotok esetén ( $n, \ell$  azonos,  $m$  eltérő) az elektronok, ameddig csak lehetséges, eltérő atompályákon helyezkednek el. Ezt az elektronok egymás közti Coulomb-taszítása okozza.

Az egyes mellékkvantumszámokat  $s$  ( $\ell = 0$ ),  $p$  (1),  $d$  (2),  $f$  (3),  $g$  (4),  $h$  (5), ... jelöléssel jelöljük. A kémiában a főkvantumszámoknak is vannak – történeti okokból – betűjelei:  $K$  ( $n = 1$ ),  $L$  (2),  $M$  (3), ... A mellékkvantumszámok jelölése az alkálifémek színkép-vonalainak leírásában az egyes mellékkvantumszámokra jellemző korrekciók neveiből ered:  $s$ (sharp=éles),  $p$ (principal=fő),  $d$ (diffuse=diffúz),  $f$ (undamental=alapvető). Az elnevezések az  $f$  állapotig terjedtek, innen betűrend szerint tovább sorolva kapjuk a további állapotok neveit. Alapállapotban a legnagyobb létező főkvantumszám a 7, a legnagyobb mellékkvantumszám a 3. Néhány állapot hullámfüggvényét az 5.7. ábrán láthatjuk (a sötétebb szín az elektron nagyobb megtalálási valószínűségét jelöli; a rajzok melletti számok a kvantumszámokat adják meg ( $n, \ell, m$ ) sorrendben).

## 5.2.4. Feladatok

### 1. feladat.

A hidrogéngáz atomjait az 5-ös főkvantumszámú állapotba gerjesztjük. Hány vonal jelenik meg a gáz emissziós színképében? Ezek közül hány vonal látható?

### 2. feladat.

Mekkora a kibocsátott fény energiája és hullámhossza, ha a hidrogénatomban az elektron a tizedik gerjesztett színről a hatodikra megy át?

### 3. feladat.

Hányszor nagyobb az alapállapotú hidrogénatomnál az a gerjesztett hidrogénatom, amelynek elektronja a  $2p$  állapotban van? És ha a  $3d$  állapotban van az elektron?

### 4. feladat.

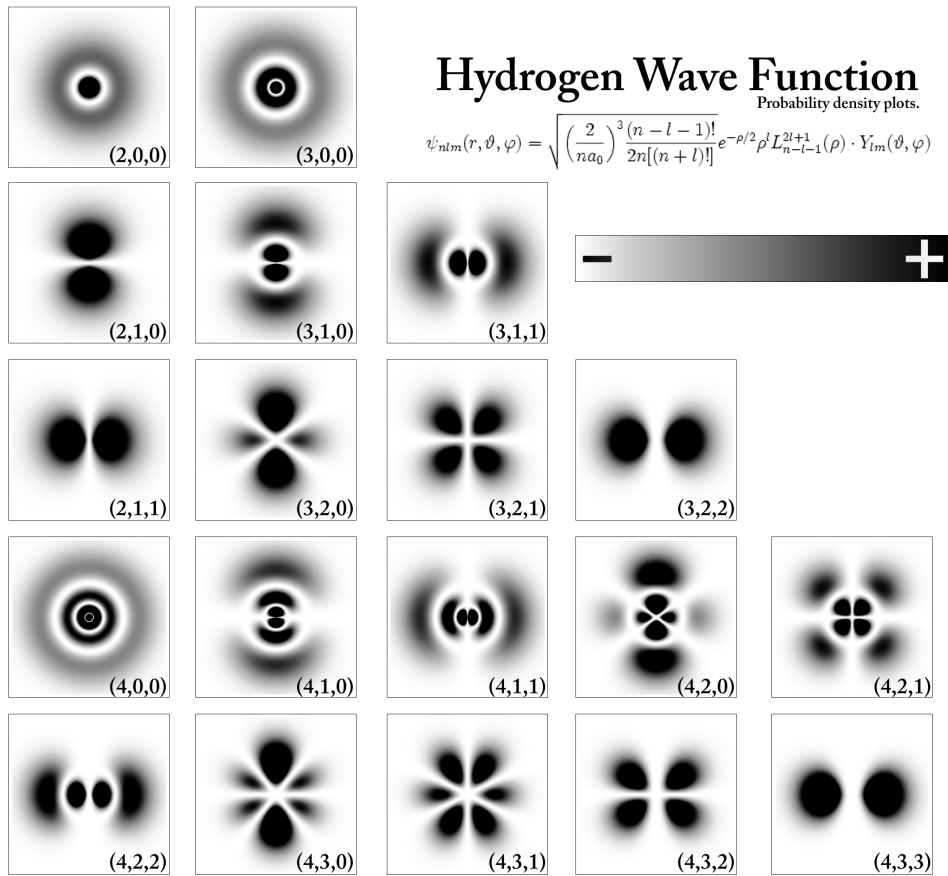
Mekkora lehet a  $60s$  atompálya mérete a hidrogénatom esetében? Hol fordulhat elő ilyen állapotú hidrogénatom?

### 5. feladat.

Valamely elem abszorpciós színképében a következő három vonalat figyelték meg:  $f_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$  Hz,  $f_2 = 3,0 \cdot 10^{15}$  Hz,  $f_3 = 3,5 \cdot 10^{15}$  Hz.

(a) Megjelenik-e a három vonal az emissziós színképben is?

(b) Adjuk meg még három további vonal frekvenciáját az emissziós színképből.



5.7. ábra. Különböző atomhállapotok hullámfüggvényei

**6. feladat.**

Egy ismeretlen anyag által emittált legnagyobb energiájú röntgensugarak hullámhossza  $\lambda = 0,211$  nm. Ez akkor keletkezik, ha egy szabad, zérus energiájú elektron zuhan egyenesen az 1s állapotba. Mely elemről lehet szó?

**†7. feladat.**

Ha egy pozitron és egy elektron egymás közelébe kerül, annihilációjuk előtt gyakran kötött állapotot alakítanak ki, amelyben a két részecske egymás körül kering. Ezt a rendszert nevezzük pozitroniumnak (Ps). A pozitronium természetesen rövid életű (élettartama ns nagyságrendű) képződmény, viszont ez az idő a mai technika mellett elég spektroszkópiái és kémiai vizsgálatok elvégzésére.

- (a) Mekkora az alapállapotú pozitroniumatom sugara?
- (b) Határozzuk meg a pozitroniumatom energiaszintjeit és hasonlítsuk össze a hidrogénével.
- (c) Melyek a pozitroniumatom látható színképvonalai? Milyen színűek?
- (d) Mennyi a pozitroniumatomok és a klóratomok aránya a pozitronium-kloridban (ez egy valóságban is előállított vegyület)? Vajon a szabad vagy az ilyen molekulában kötött pozitroniumatom „él” tovább?

*Megjegyzés.* Több részecskés rendszerekben a Bohr-féle kvantumfeltételt a rendszer teljes perdületére értjük.

**†8. feladat.**

A müion-atom protonból és az alapállapotban befogott müionból áll, amely részecske az elektronnál 207-szer nehezebb.

- (a) Mekkora a proton által befogott müion kötési energiája?
- (b) Mekkora az alapállapotú müion-atom mérete?
- (c) Mekkora energiájú foton emittálódik, ha az  $n = 2$  állapotból alapállapotba kerül a müion?

**†9. feladat.**

Ismert, hogy egy elektron mágneses térben körpályára állhat. Ha a mágneses indukció  $B$  értéke nagyon nagy lesz, az elektron viselkedése kvantumossá válik, csak diszkrét energiaszinteken fordul elő. Ezeket a szinteket *Landau-nívóknak*<sup>1</sup> nevezzük.

- (a) Mekkora az  $n$ . szinten mozgó elektron pályájának sugara?
- (b) Mekkora sebességgel halad az elektron az  $n$ . szinten?
- (c) Mekkora az elektron energiája az  $n$ . szinten? (Az elektronnak nem csak mozgási energiája van!)
- (d) Mekkora frekvenciájú fotonokkal gerjeszthető a rendszer?

---

<sup>1</sup>Lev D. Landau (1908-1968) szovjet fizikus után





## 6. fejezet

# A magfizika alapjai

### 6.1. Az atommag szerkezete, a kötési energia

Az atommag felfedezése: Rutherford-féle szórás kísérlet (1911) – az atom pozitív töltése és tömegének legnagyobb része egy  $10^{-14}$  m sugarú gömbön belül van. Ez az *atommag*.

#### 6.1.1. Kísérleti tapasztalatok

A hidrogénatommag a *proton*. Töltése  $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C, tömege  $1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. (A proton töltése ugyanakkora, mint az elektroné, csak pozitív; a tömege kb. 1835-ször nagyobb.)

1. Az atommagok  $M_{\text{mag}}$  tömege *körülbelül* egészszám-szorosa a proton  $M_p$  tömegének:

$$M_{\text{mag}} \approx A \cdot M_p; \quad A: \text{tömegszám}$$

2. Az atommagok töltése a proton töltésének *pontosan* egészszám-szorosa:

$$q_{\text{mag}} = Z \cdot q_p; \quad Z: \text{rendszám}$$

Mindig  $A \geq Z$ , egyenlőség is csak a hidrogénatom esetén áll fenn.

*Az első atommagmodell (Rutherford, 1913):* az atommag  $A$  darab protonból és  $A - Z$  darab elektrontól áll. Ezt a kvantumfizika törvényei (Heisenberg-reláció) nem engedik, hisz elektron a kisméretű magban nem lehet tartósan jelen.

*Tovább lépés:* a tömegspektroszkópos mérések mutatják, hogy az azonos rendszámú magok nem mind azonos tömegűek. Izotóp: azonos rendszámú, de különböző tömegszámú atommagok. *James Chadwick* (1932) felfedezi a *neutron*: semleges, tömege egy picit (2,5 elektrontömeggel) nagyobb a proton tömegénél. (Paraffinnak ütköztettek „valamit”, ennek hatására proton sugárzás keletkezett: *Bothe, Geiger, Webster*.)

Az  $A$  tömegszámú mag  $Z$  darab protont és  $N = A - Z$  darab neutronot tartalmaz. A protonok és neutronok összefoglaló neve: *nukleonok*. Jelölés:  ${}^A_Z\text{Mag}$ , pl.  ${}^{235}_{92}\text{U}$ .

### Megjegyzések.

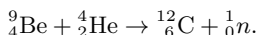
1. Jellegzetes izotópok:

H:  ${}^1_1\text{H}$  – prócium;  ${}^2_1\text{H}$  – deutérium;  ${}^3_1\text{H}$  – trícium (radioaktív);

C:  ${}^{12}_6\text{C}$ ;  ${}^{14}_6\text{C}$  – radiokarbon (radioaktív);

U:  ${}^{235}_{92}\text{U}$ ;  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .

2. A nukleonok száma a magátalakulásokban nem változik. Ezt *Wigner Jenő* (1949) fogalmazta meg a bariontöltés megmaradási törvényében (Nobel-díj: 1963). Néhány részecske bariontöltése: 1:  $p^+$ ,  $n^0$ ; 0:  $e^\pm$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ; -1:  $p^-$ ,  $\bar{n}^0$ .
3. 1912-ben *Rutherford* megkérte *Hevesy György* (1885-1966) vegyész gyakornokot, hogy az urán és a rádium bomlástermékei közül különítse el az erősen sugárzó RaD-vel jelölt anyagot a „piszkos” ólomtól. Miután a két anyagot kémiai módszerekkel szétválasztani nem tudta, rájött, hogy a RaD az ólom radioaktív izotópja. („Ha nekem nem sikerült, a természet sem tudja megkülönböztetni.”) Ez alapján alkotta meg Hevesy a radioaktív nyomjelzés technikáját (kémiai Nobel-díj: 1944). Ő fedezte fel a hafniumot (Hf).
4. A Chadwick által vizsgált neutrontermelő magfolyamat:



### 6.1.2. A nukleáris kölcsönhatás vizsgálata

Vajon milyen kölcsönhatás tartja a nukleonokat az atommag kb.  $10^{-14}$  sugarú gömbjén belül?

A kvantumfizika törvényei szerint a magba zárt nukleon mozgási energiája (*kvantumnyugtalanág*):

$$E_m = 3 \cdot E_{m,x} \approx 3 \cdot \frac{\Delta p_x^2}{2m} \approx \frac{3}{2m} \left( \frac{\hbar}{r} \right)^2 \approx 10^{-13} \text{ J.}$$

A nukleonok között működik a gravitációs kölcsönhatás. Ennek nagyságrendje:

$$E_{\text{gr}} = -\frac{\gamma m M_{\text{mag}}}{r} \approx -10^{-48} \text{ J.}$$

Ez igen csekély, nincs jelentősége. A nukleonok közötti kölcsönhatásban a gravitációs erőtől eltekinthetünk.

Az elektromos kölcsönhatás sem felelhet a mag egyben maradásáért, hisz a neutron semleges, a protonok pedig taszítják egymást, így az atommagot gyengítik.

A nukleonok között tehát egészen más, újfajta erőnek kell működnie. Ez az új erő mind a gravitációs, mind az elektromos erőnél erősebb. Ez a *nukleáris kölcsönhatás*.

Az 1930-as években cseppfolyós hidrogént bombáztak neutronnal és protonnal (szórás kísérlet). A részecskék eltérülését vizsgálták, ebből a következő tulajdonságok adódtak a proton és a neutron között ható erőre:

- töltésfüggetlen ( $p^+ - p^+$ ,  $p^+ - n^0$ ,  $n^0 - n^0$  között ugyanakkora);
- vonzó (a nukleáris kölcsönhatási energia negatív);
- rövid hatótávolságú (hatótávolság:  $r < 10^{-15}$  m, minden nukleon csak a szomszédjait „érzi”);
- igen erős (rövid távolságon:  $F_{\text{nukl}} \geq 100F_{\text{el}}$ ).

### 6.1.3. A kötési energia

A deutériummag (deuteron) 1 protonból és 1 neutronból áll, mégis  $m_p + m_n \neq m_D$ , hanem  $m_p + m_n > m_D$ . A tömeghiány (*tömegdefektus*):  $\Delta m = (m_p + m_n) - m_D$ .

A  $\Delta m$ -nek megfelelő  $W = \Delta m c^2$  nagyságú munkát kell akkor végezni, ha a deuteron egy protonra és egy neutronra bontjuk szét. (A deuteronnál ez a munka 0,4 pJ.) A folyamat megfordítva: ha egy szabad proton és neutron deuteronná áll össze, akkor  $\Delta m$  tömeghiány és a megmaradási törvény szerint  $W$  energiájú foton sugárzódik ki. A tömeghiánnyal egyenértékű  $E_k = \Delta m \cdot c^2$  energiát kötési energiának nevezzük.

A darab nukleon *kötési energiáján* értjük azt az energiát, amellyel kisebb a nukleonok együttes energiája a szabad állapothoz képest (amikor a nukleonok egymástól messze vannak).

Tömeg-energia ekvivalencia:  $E_k = \Delta m c^2$ :

$$E_k = [(Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n) - M_{\text{mag}}] \cdot c^2.$$

Egy gyakran használt mennyiség az *egy nukleonra jutó kötési energia* ( $\varepsilon$ ). Ennek definíciója:  $\varepsilon = \frac{E_k}{A}$ .

**Példafeladat.** Határozd meg a deuteron nukleáris kölcsönhatási energiáját. Az atommag sugara  $r = 1,4 \cdot 10^{-15}$  m.

**Megoldás.** A dinamikai értelmezés szerint az energia a negatív kölcsönhatási energia és a két nukleon mozgási energiája (előjeles) összegeként kapható:

$$E = E_{m,n^0} + E_{m,p^+} + E_{\text{k.h.}}$$

Ebből átrendezés után, és felhasználva, hogy a proton és a neutron tömege jó közelítéssel egyenlő:

$$E_{\text{k.h.}} = E - 2 \cdot E_{m,N} = -E_k - 2 \cdot \frac{3}{2m} \cdot \left(\frac{\hbar}{r}\right)^2 = -0,4 \text{ pJ} - 10 \text{ pJ} = -10,4 \text{ pJ}.$$

**Megjegyzés.** Az atomfizika jellemző energianagyságrendje az aJ ( $10^{-18}$  J), a magfizikáé a pJ ( $10^{-12}$  J).

### 6.1.4. Feladatok

#### 1. feladat.

Határozzuk meg a deuteronban levő egy nukleonra jutó kötési energiát, ha  $m_{\text{proton}} = 1,67261 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{neutron}} = 1,67491 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{deuteron}} = 3,34352 \cdot 10^{-27}$  kg.

**2. feladat.**

Határozzuk meg az egy nukleonra jutó kötési energiát a következő atommagokban:  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$ . A szükséges adatok:  $m_{\text{proton}} = 1,67261 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{neutron}} = 1,67491 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{He}} = 6,64460 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{Li}} = 11,64762 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{Be}} = 14,96135 \cdot 10^{-27}$  kg.

**3. feladat.**

Az oxigén 16-os izotópjának magjában az egy nukleonra jutó kötési energia 7,975 MeV.  $m_{\text{proton}} = 1,67261 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{\text{neutron}} = 1,67491 \cdot 10^{-27}$  kg. Mennyi az oxigénizotóp tömege kg-ban?

**4. feladat.** (98-1-7<sup>1</sup>)

Rutherford és munkatársai a század elején az atom belső szerkezetének megismerése céljából vékony aranyfóliára merőlegesen alfa-sugarakat bocsátottak. A kísérlet során a mérések azt mutatták, hogy az alfa-részek nagy hányada alig eltérülve haladt át az aranylemezen, de ritkán egyes alfa-részek szinte merőlegesen „visszapattantak” (azaz közel 180°-os eltérést szenvedtek) a lemeztől.

(a) A mérések szerint minden 100 ezer alfa-részből átlagosan 4 pattant vissza a lemeztől. Ismerve, hogy a lemez kb. 10 ezer atomi rétegből állt, becsüljük meg, hogy az alfa-részek visszaszóródását okozó aranyatommagok átmérője hányad része az atomok átmérőjének.

(b) Az átmérők becsült arányából következtessünk az aranyatommagok sűrűségére, ha tudjuk, hogy az arany sűrűsége  $19\,300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

(c) Hogyan változna meg az  $\alpha$ -részecskék visszaszóródási aránya, ha 1000-szer vastagabb aranylemezt használnánk a kísérletekhez? Mivel magyarázható a változás? Az így kapott kísérleti eredményekből magmértetre nagyobb, vagy kisebb becsült értéket kapnánk, mint az eredeti vékony lemez esetében?

**5. feladat.** (99-1-1)

Hofstädter nagy energiájú elektronokkal mérte meg az atommagokban a töltések eloszlását. Legalább mekkora energiájú elektronokra volt ehhez szükség? *Adatok:* az elektron tömege  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg, az atommag átmérőjét vegyük  $10^{-14}$  m-nek.

**†6. feladat.** (02-2-3)

Gondolkozzon el az alábbi kérdéseken, majd írja le elképzeléseit.

(a) Mit gondol, az atommagban miért nem érvényes a kémiában tanult Hund-szabály?

(b) Mit gondol, milyen atommagok lennének stabilak, ha nem lenne érvényes a nukleonokra a Pauli-elv?

**7. feladat.** (03-1-5)

Tegyük fel, hogy egy stabil alumínium atommagot elemi részeiből (protonokból és neutronokból) építünk fel. Mennyi energia szabadul fel? Mekkora lesz a nukleononkénti kötési energia? Az  ${}^{27}\text{Al}$  atom tömege:  $m_{\text{Al}} = 26,9815$  u.

<sup>1</sup> A feladatok a Szilárd Leó Országos Fizikaversenyen kerültek kitűzésre; a feladat után látható három, kötőjellel elválasztott szám a feladat kitűzésének év-, forduló- és feladatszámát jelöli.

## 6.2. Az atommag cseppmodellje

Egzakt matematikai eszközökkel nehéz a magfizika tárgyalása, mert sok részecskét tartalmaz, amelyek között nagyon erős a kölcsönhatás. Emiatt az empirikus megfigyelésnek rendkívül nagy szerepe van. *Robert Hofstädter* (Nobel-díj: 1961) rövid hullámhosszú elektronokkal megmérte az atommagok ( $A > 27$ ) sugarát. A mérési eredményekből következően:  $R \sim \sqrt[3]{A}$ , vagyis

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}; \quad R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

ahol  $R_0$  neve *nukleonsugár*, vagy *Hofstädter-állandó*. Ebből a mag térfogata:  $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \cdot A$ , amiből a nukleonok számsűrűsége  $\rho = \frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi R_0^3}$ , ami állandó. Az atommag nukleon- (tehát tömeg-) sűrűsége állandó. Azonos térfogatban bármely magban ugyanannyi nukleon van, e tulajdonságukban hasonlítanak a folyadékokra.

### 6.2.1. Cseppmodell (Gamow, Bohr)

Az atommagok energiáját (amely éppen a kötési energia ellentettje) becsüljük meg a cseppmodell alapján, ahol az atommagot folyadékcseppként képzeljük el.

- **Térfogati energiatag:**

Egy folyadékcseppben a molekulák csak a közvetlen szomszédakkal létesítenek másodrendű kötések. Ehhez hasonlóan – a magerő kicsiny hatótávolsága miatt – egy nukleon hatásgömbje jóval kisebb, mint az atommag. Minden nukleon csak a szomszédai nukleáris vonzását érzékeli; első közelítésként az atommag energiája arányos a nukleonok számával:

$$E_V = -\varepsilon_V \cdot A,$$

ebben  $\varepsilon_V$ -nek hasonló a jelentése a forráshőhöz.

- **Felületi energiatag:**

A mag felszínén levő nukleonok hatásgömbje nincs egészen betöltve, így a többi nukleon vonzása a mag belseje felé vonzza őket, így a felszínt minimalizálni igyekeznek. Az atommag felületén a nukleonok energiája magasabb, mint belül. Ez a felületi energia a magot destabilizálja, és arányos a mag felületével, azaz a nukleonszám  $\frac{2}{3}$ -adik hatványával:

$$E_F = \varepsilon_F \cdot A^{2/3},$$

ebben  $\varepsilon_F$  jelentése a felületi feszültséghez hasonlít.

- **Coulomb-energiatag:**

A Coulomb- (elektromos) erő hatótávolsága nagy. Egy proton érzi az összes többi proton elektromos taszítását. Egy  $Ze$  töltésű gömb elektromos energiája  $E_e = \frac{3}{5} k \frac{Z^2 e^2}{R}$ , amiből, figyelembe véve a konstans tagok összevonhatóságát, a Coulomb-energiatag kifejezése:

$$E_C = \varepsilon_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

• **Pauli-energiatag:**

A nukleonoknak van mozgási energiájuk is. A Pauli-elv szerint mind a protonok, mind a neutronok párosával töltik fel az energiaszinteket. A nukleonok összes mozgási energiája akkor a legkevesebb, ha a lehető legmélyebb energiaszinteken vannak, azaz ugyanannyi proton van, mint neutron. Ettől az ideális helyzettől távolodva az energia másodfokú függvény szerint nő:

$$E_P = \varepsilon_P \frac{(N - Z)^2}{A} = \varepsilon_P \frac{(A - 2Z)^2}{A}.$$

A négy energiatag együtt adja ki az atommag energiáját:

$$E = E_V + E_F + E_C + E_P.$$

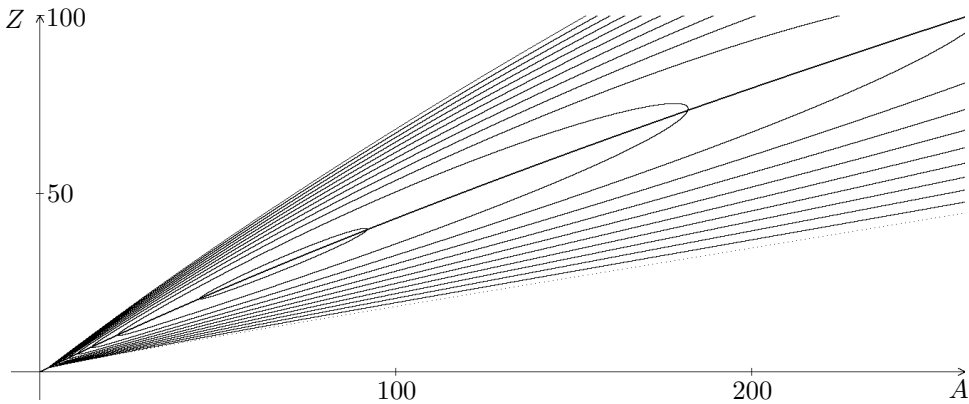
$$E(A, Z) = -\varepsilon_V \cdot A + \varepsilon_F \cdot A^{2/3} + \varepsilon_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \varepsilon_P \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (6.1)$$

Ez az atommag energiáját leíró félempirikus képlet, az energiatagok értéke:

$$\varepsilon_V = 2,52 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_F = 2,85 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_C = 0,11 \text{ pJ}; \quad \varepsilon_P = 3,80 \text{ pJ}.$$

**Megjegyzések.**

1. Az energiatagok együtthatóit úgy határozták meg, hogy a mért energiákat a képlet minél jobban lefedje, ezért nevezzük a képletet félempirikusnak.
2. A fenti képlet a legtöbb mag energiáját 2%-os hibakorláttal adja meg. Ez pontosítható egy ötödik taggal, a párenergiával, amelynek előjele a következőképp függ a protonok és neutronok számának előjelétől:
  - negatív (stabilizáló), ha a két szám páros (141 db stabil mag)
  - nulla, ha az egyik szám páros, a másik páratlan (96 db stabil mag)
  - pozitív (destabilizáló), ha mindkét szám páratlan (5 db stabil mag)
 A párenergia nagyobb magoknál válik jelentőssé (abszolút értéke  $A^{3/4}$ -del arányos), az azonos energiaszinten levő protonok és neutronok hullámfüggvényének eltolódása miatt. A párenergiával kiegészített energiaképletet *Weizsäcker-formulának* is nevezik.
3. A cseppmodell szerint az atommag gömb alakú. *John Wheeler* szerint azonban létezhet olyan mag, amely toroid alakú ( $A > 1000$  esetén, a hétköznapi világban ilyen magok nem léteznek). Léteznek viszont ellipszoid alakú deformált atommagok.
4. Az energiaképlettől eltérő, kiugróan stabil magszerkezetek is léteznek. Ezek az atommag héjmodelljének behatóbb vizsgálatával adódó *mágikus számokhoz* kötődnek. Ezek zárt héjakat képviselnek, az ilyen proton- vagy neutronszámú atommagok rendkívül stabilak. A mágikus számok: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Az ilyen rendszámú elemek (He, O, Ca, Sn, Pb) különösen stabilak, sok van belőlük az Univerzumban. Ezek a mágikus atommagok gömb alakúak, deformált magok a mágikus számok között vannak.
5. Néhány rendszámhoz, neutronszámhoz és tömegszámhoz ún. *Pauli-lyukak* kötődnek. Ilyen például az ötös tömegszám: az egyik nukleonnak már az alapállapotú s szintnél lényegesen magasabb p energiaszinten kellene elhelyezkednie, ehhez viszont nem nyújt elég kölcsönhatási energiát a már ott levő négy nukleon vonzása.



6.1. ábra. Az energiafelület szintvonalas térképe

### 6.2.2. A nukleáris energiafelület vizsgálata

Az alapállapotban levő egyetlen nukleonra jutó energiát úgy kapjuk meg, hogy az atommag energiáját leíró 6.1. képletet elosztjuk a tömegszámmal:

$$\varepsilon(A, Z) = -\varepsilon_V + \varepsilon_F A^{-1/3} + \varepsilon_C A^{-4/3} Z^2 + \varepsilon_P \left( \frac{A - 2Z}{A} \right)^2 \quad (6.2)$$

A kétváltozós függvényt egy felülettel szemléltethetjük, ez az *energiafelület*. Az energiafelület szintvonalas térképe a 6.1. ábrán látható.

Az energiafelület (másik nevén a *Nukleáris Völgy*) mélyvonala az 1:1 proton-neutron aránytól a tömegszámtengely irányában (több neutron, mint proton) elhajlik.

A Nukleáris Völgy legmélyebb pontja  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ -nál, a vas tájékán van. A völgy mélyvonalát a 6.2. ábra mutatja.

*Az energiafelület egy olyan völgy, amelynek lejtői meredeken lejtnek a mélyvonal felé; mélyvonala a kisebb magok felől meredeken lejt, a nagyobb magok felé lankásan emelkedik.*

### 6.2.3. Feladatok

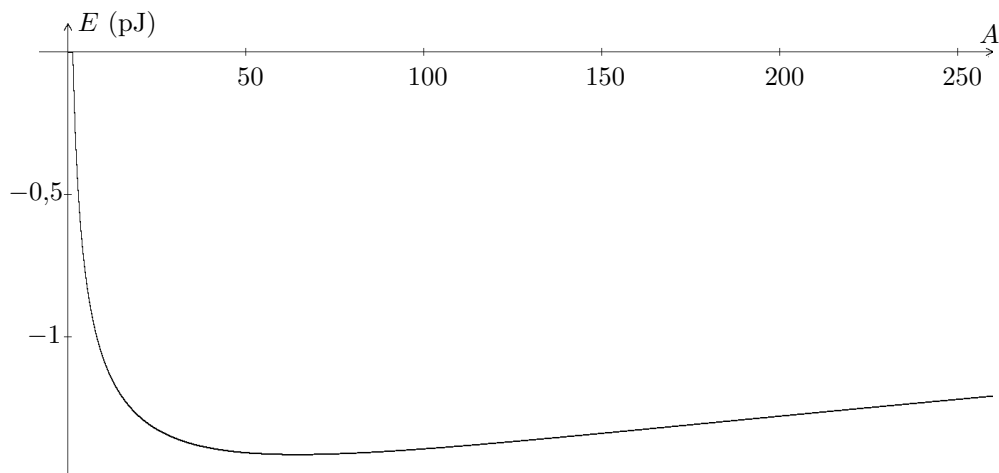
#### 1. feladat. (01-1-5)

A természetben a klórnak két izotópja létezik:  ${}^{35}_{17}\text{Cl}$  és  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ . Mit gondol, miért nincs a klórnak 36-os tömegszámú izotópja?

#### 2. feladat. (02-1-6)

Ön szerint mely izotópok léteznek ténylegesen a természetben az alább felsoroltak közül:  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{H}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^5\text{Li}$ . Indokolja meg választát!





6.2. ábra. Az energiafelület mélyvonala

**3. feladat.** (99-2-7)

Egy neutroncsillag tömege kb. akkora, mint a Napé ( $2 \cdot 10^{30}$  kg), sűrűsége, mint az atommagé. Mekkora a neutroncsillag sugara? Mekkora a felszínén a nehézségi gyorsulás?

**†4. feladat.** (02-2-5)

A  $^2\text{H}$  izotóp kötési energiája 0,356 pJ. A  $^4\text{He}$  atommag kötési energiája ennek majdnem 13-szorosa: 4,533 pJ. Wigner Jenő ebből arra következtetett, hogy a mageró nagyon rövid hatótávolságú. Miért?

**5. feladat.** (99-1-3)

Határozzuk meg, hogy a következő, két részecskét tartalmazó rendszerek közül melyik a legalacsonyabb energiájú! Proton-proton, proton-neutron, vagy a neutron-neutron? Indokoljuk meg a választ!

## 7. fejezet

# Az atommag átalakulásai

### 7.1. Radioaktív bomlások

#### 7.1.1. Gamma-bomlás

Az atomhøj szerkezetét leíró törvények (kémiaiából ismeretesek): *energiaminimum-elv*, *Pauli-elv*, *Hund-szabály*. A kvantummechanikát az atommagra alkalmazva a következő törvények válnak igazzá: *energiaminimum-elv*, *Pauli-elv*, *anti-Hund-szabály*.

Az alapállapotú atommag nukleonjai a Pauli-elv által megengedett legmélyebb szinteken vannak. Az atommag nem mindig van alapállapotban, ilyenkor az atommag  $E'(A, Z)$  energiája az energiafelület felett van. A mag alapállapotba kerülésekor rázúhan az energiafelületre, s a felszabaduló energiakülönbözetet az atommag egy  $\gamma$ -foton (rendkívül nagy frekvenciájú elektromágneses sugárzás) formájában kibocsátja:

$$E_\gamma = hf = E'(A, Z) - E(A, Z).$$

A jelenséget  $\gamma$ -bomlásnak nevezzük.

#### Megjegyzések.

1. A  $\gamma$ -foton energiája jellemzően 0,1 pJ nagyságrendű, ami kb. 100000-szerese egy látható foton energiájának.
2. A gamma-sugarak (mint minden más ionizáló sugárzás) előidézhetnek égési sebet, rákot és genetikai mutációkat.
3. A gamma-sugarak elleni védekezés nagy atomtömegű és sűrűségű elemekkel a leghatásosabb. Erre a célra rendszerint ólmot használnak, de például a reaktorok aktív zónáját több méter vastag nehézbeton fallal veszik körbe. Ez a beton magas kristályvíztartalmú, nehézfémekkel adalékolt (pl. barittal, Ba). Minél nagyobb energiájú a sugárzás, annál vastagabb réteggel lehet védekezni ellene.
4. A gamma-sugárzás háromféleképpen lép kapcsolatba az anyaggal:
  - Fotoeffektus – egy atom elektronhéja elnyeli a foton, aminek energiáját teljesen átveszi egy elektron. Ez az elektron gerjesztett állapotba kerül, és ha a foton energiája nagyobb egy küszöbenergiánál (a kilépési munkánál), általában el is hagyja az atomot.

- Compton-szórás – a foton rugalmasan szóródik egy szabad, illetve gyengén kötött elektronon. Ez esetben a foton energiájának csak egy részét adja át az elektronnak, nagyobb energiájú fotonokra jellemző.
- Párképzés – elektron-pozitron (vagy más részecske-antirészecske) pár képződhet, ha a foton energiája meghaladja a pár teljes nyugalmi tömegét ( $e^- - e^+$  pár esetén 1,02 MeV-ot); az ezen felüli energia a pár mozgási energiájába megy át. Párképzés csak erősen inhomogén elektromos térben (pl. egy atommag közelében) mehet végbe.

5. A gamma-sugárzás alkalmazásai:

- sterilizálás
- terápia – rákos daganatok elpusztítása
- radiológia – radioaktív izotópok nyomonkövetése a szervezetben diagnosztikai céllal
- gamma-radiográfia – roncsolásmentes anyagvizsgálat, átvilágítás, hibakeresés
- elemanalízis – karakterisztikus  $\gamma$ -fotonok segítségével (*aktivációs analízis*)

### 7.1.2. Béta-bomlás

Az atommag  $A$  nukleonját alapvetően az erős kölcsönhatás tartja össze, viszont az energia az  $A$  tömegszámon kívül a  $Z$  rendszámától is függ. Rögzített  $A$  mellett keressük meg az egy nukleonra jutó energiát minimalizáló  $Z$  rendszám értékét (azaz a Nukleáris Völgy mélyvonalát). Az energia képletét teljes négyzetté alakítva:

$$Z_{\min} = \frac{A}{2(1 + \varepsilon A^{2/3})}, \quad \varepsilon = 0,00724$$

Ezt a mélyvonalat láthatjuk a 6.1. ábrán is. Itt és a fenti függvényen is látható, hogy kis magoknál az optimális proton-neutron arány 1:1, azonban nagyobb tömegszám esetén az optimális arány a neutronok túlsúlya felé mozdul, a proton-neutron arány 2:3 is lehet (a Coulomb-taszítás növekvő jelentősége miatt).

A darab nukleon halmaza még nem az  $A$  tömegszámú magok közül a legmélyebb energiájú, azaz a létrejövő magok nincsenek feltétlenül a Nukleáris Völgy mélyvonalán vagy annak közelében. A mag ilyenkor a Nukleáris Völgy két oldalfalán, a Pauli-lejtőkön helyezkedik el és energiája mélyülne, ha a lejtőn lecsúszva, tömegszámát megőrizve a számára kedvező proton-neutron arányt állítaná be magának. Mivel a magok többsége a mélyvonal közelében helyezkedik el, kell, hogy létezzen olyan lehetőség, amelynek révén az univerzum korai szakaszában, vagy a csillagok belsejében fúzióval kialakuló, különböző méretű és összetételű magok beállíthatják az optimális nukleonarányt.

Ehhez az kell, hogy a neutronok és a protonok átalakulhassanak egymásba. Ezért a természet negyedik alapvető kölcsönhatása, a gyenge kölcsönhatás a felelős. A szabad neutron bomlása 15 perc átlagos élettartammal meg is történik, ez energiafelszabadulással jár:

$$M_{n^0} = M_{p^+} + 2,5M_{e^-}$$

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu} \quad (\text{W. Pauli, 1933})$$

Az atommagban kötött neutron bomlása nem mindig megy így végbe, csak akkor, ha ezáltal az atommag energiája csökken.

*A különböző  $\beta$ -típusú bomlások:*

bomlás neve	folymat	energetikai feltétel
Túl sok $n^0$ : $\beta^-$ -bomlás	${}^A_Z\text{Mag}' \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Mag} + e^- + \bar{\nu}$	$E(A, Z) + M_n c^2 >$ $> E(A, Z + 1) + M_p c^2 + m_e c^2$
Túl sok $p^+$ : $\beta^+$ -bomlás	${}^A_Z\text{Mag}' \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Mag} + e^+ + \nu$	$E(A, Z) + M_p c^2 >$ $> E(A, Z - 1) + M_n c^2 + m_e c^2$
elektronbefogás	$e^- + {}^A_Z\text{Mag}' \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Mag} + \nu$	$E(A, Z) + M_p c^2 + m_e c^2 >$ $> E(A, Z - 1) + M_n c^2$

### Megjegyzések.

1. A  $\beta$ -bomlás kísérleti vizsgálata szerint a keletkező elektron nem viszi el teljes egészében a felszabaduló energiát. 1933-ban feltételezte Pauli, hogy keletkezik egy harmadik részecske is.

$\nu$  - neutrínó;  $\bar{\nu}$  - antineutrínó. Tömege kicsi (pár eV), elektromos töltése nincs.

2. A következő kölcsönhatásokat (többek között) tapasztalták:

$$e^- + p^+ \rightarrow n^0 + \nu;$$

$$\bar{\nu} + p^+ \rightarrow n^0 + e^+;$$

$$\nu + n^0 \rightarrow p^+ + e^-;$$

ezeket viszont nem:

$$\bar{\nu} + n^0 \not\rightarrow p^+ + e^-;$$

$$\nu + p^+ \not\rightarrow n^0 + e^+.$$

Ezt úgy lehetett értelmezni, hogy a nukleonoknál (kvarkoknál) könnyebb részecskéknél  $l$  leptontöltésük van:

$$l = +1: e^-, \nu, \dots$$

$$l = 0: p^\pm, n^0, \bar{n}^0, \gamma, \dots$$

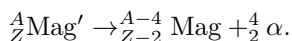
$$l = -1: e^\pm, \bar{\nu}, \dots$$

A leptontöltés a Standard Modell szerint szigorúan megmarad. (*Marx György, 1952*)

3. A  $e^+$  és az  $e^-$  egymás antirészecskéje, azaz tömegüktől eltekintve minden jellemzőjük ellentétes. Ha találkoznak, szétsugárzódnak két  $\gamma$ -fotonná. Egy foton nem keletkezhet (általánosan két részecskéből egy), mert akkor nem teljesülhet a lendületmegmaradás. Ez a *szétsugárzódás (annihiláció)* jelensége.
4. E folymat ellentéte a *párkeltés*. Ha elég nagy energiájú foton egy atommag mellett halad el, akkor a foton elektron-pozitron párrá alakulhat ( $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ ). A pár nyugalmi energiája  $2mc^2$ , ahol  $m$  az elektron tömege. Kiszámolva, az energia 1,022 MeV-nek adódik (ez kb.  $1,64 \cdot 10^{-13}$  J). Ha ennél nagyobb a foton energiája, akkor lejátszódhat a folymat és a többletenergia a két részecske energiáját növeli.
5. A Genf melletti CERN-ben vizsgálják a rész-antirész kölcsönhatást, már csináltak antideutériumot és antihéliumot is.
6.  $\beta$ -bomlásokor az atommag az energiafelület fölé kerül (az átalakulás során a nukleon azon az energiaszinten marad, ahol eredetileg volt, másik nukleonként azonban – mivel abból kevesebb van – alacsonyabb energiaszintre is kerülhet), innen  $\gamma$ -bomlással kerül alapállapotba. Az elektronbefogást karakterisztikus röntgensugárzás is követi, ugyanis az elnyelt elektron üresen maradt helyére magasabb szinten levő elektron esik, a szintek közötti jól meghatározott energiakülönbség sugárzódik ki.

### 7.1.3. Alfa-bomlás, maghasadás

Nehezebb atommagok a tömegszám csökkentésével még mélyebb energiájú állapotba kerülhetnek. Ilyen tömegszámot csökkentő jelenség az  $\alpha$ -bomlás. 1909-ben figyelte meg *Rutherford* azt a jelenséget, amelyben nagy magok  ${}^4_2\text{He}$ -magokat,  $\alpha$ -részecskéket bocsátanak ki:



Az alfa-részecske a hélium leggyakoribb izotópjának, a  ${}^4\text{He}$  izotópnak az atommagja, ami rendkívül stabil atommag (az egy alhéjon levő nukleonok különösen kötött alakzatot alkotnak, ezek válnak ki, mint alfa-részecskék). Mivel az alfa-részecske két protonból és két neutronból áll, az atommag tömegszáma négygyel, rendszáma kettővel csökken. A spontán alfa-bomlás energetikai feltétele:

$$E(A, Z) > E(A - 4, Z - 2) + E(4, 2).$$

Az alfa-bomlást a maghasadás speciális esetének tekintjük. A nehéz magok azért nem hasadnak el azonnal, mert a két hasadványt a nukleáris erő ellenében a magerők hatótávolságán kívülre kell eltávolítani egymástól, hogy a Coulomb-erő végképp eltaszítsa őket egymástól. Tehát a maghasadás ( $\alpha$ -bomlás) beindításához aktiválási energia kell. Az atommag rendszerint nem kapja meg ezt az energiát, ezért léteznek stabil magok is. Azonban földi körülmények között is léteznek hasadó,  $\alpha$ -bomló izotópok, ennek az *alagúteffektus* az oka.

#### Az alagúteffektus

Az alfa-részecskét alkotó nukleonokat a magerő a magban tartaná, a Coulomb-erő eltávolítaná. E két erő együttese adja a potenciális energiát. A 7.1. ábrán látható potenciálgát miatt az alfa-részecske az atommagban maradna, ugyanis a részecske ( $\alpha$ -rész, hasadványmag) energiája állandó, a gát egyes részein mozgási energiája negatív lesz, ami ellentmondás. A kvantummechanikának köszönhetően azonban a részecske hullámfüggvénye a mag határain túlra is kiterjed, oda, ahol a mozgási energia már pozitív. Véges valószínűséggel tehát a potenciálgáton túl is előfordul a részecske, ahonnan már el tud szakadni az atommagtól:

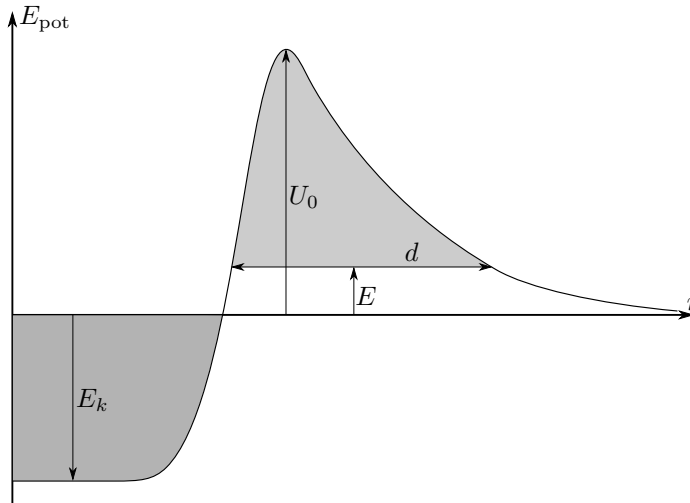
$$E + \frac{\Delta p^2}{2m} = U_0 \rightarrow \Delta p = \sqrt{2(U_0 - E)m} \rightarrow \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2(U_0 - E)m}}.$$

Ha  $\Delta x > d$ , akkor a részecske kijuthat az atommagból.

A hasadványok szétaszitódása során végzett elektromos munka révén a maghasadás ( $\alpha$ -bomlás) energiát szabadít fel.  $\alpha$ -bomlás során a mag letérhet a Nukleáris Völgy mélyvonaláról, ahova  $\beta$ - és  $\gamma$ -bomlások sorozatával jut vissza.

#### Megjegyzések.

1. Több, egymás után bekövetkező radioaktív bomlás sorozatát *bomlási sornak* nevezük. A háromféle bomlás közül csak az  $\alpha$ -bomlás változtatja meg a mag tömegszámát: négygyel csökkenti. Így négy bomlási sort különböztetünk meg, a magok tömegszámának négyes osztási maradéka szerint. (Függvénytáblázat, Fizika 179-181. oldal)



7.1. ábra. Alagúteffektus

2. A nehéz magok folyamatos bomlása biztosítja a geotermikus energiát (a földgáz héliumtartalma a kidobott alfa-részecskékből ered).
3. Biológiai hatás: az alfa-részecske viszonylag nehéz, és elektromos töltéssel rendelkezik, ezért a közepes szabad úthossza rövid. Ez egyszerre veszélyforrás és szerencse is. Egyrészt könnyen elnyelődik, pár centiméteres levegőrétegben, vagy a bőr hámséjtjein. Másfelől, a becsapódása különösen hatékonyan ionizál. Erős roncsoló hatása miatt a radiotoxicitási számításokban az  $\alpha$ -sugárzást hússzoros súllyal vesszük figyelembe. Egy  $\alpha$ -sugárforrás elfogyasztása életveszélyes (pl. Litvinyenko-gyilkosság – 2006,  $^{210}\text{Po}$ )!

#### 7.1.4. Magfúzió

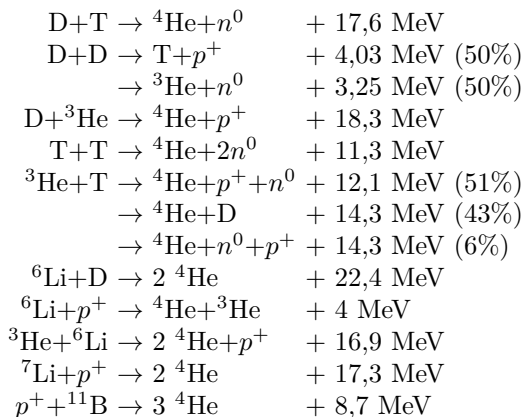
A kis magokban a nukleonok nagyobb hányada van a felületen, ez megemeli az egy nukleonra jutó energiát. A kis magok a mélyebb energiájú magok felé egyesüléssel (fúzióval) juthatnak el. (A kis magok a kapilláris lejtőn „lecsúsznak” a „vastócsa” elemei felé.) A kis magok fúziója energiafelszabadulással jár, mert a nagyobb magokban a felületi energia mélyebb. Fúzió során a felületen lévő nukleonokat a magerő húzza be, ezt azonban a Földön megakadályozza a Coulomb-taszítás (*fordított alagúteffektus*). Magfúzió csak magas hőmérsékleten lehetséges (csillagok mélyén, hidrogénbombában, ...).

A vasnál nehezebb elemek fúziója endoterm (energiaigényes), ezért szélsőséges feltételeket kíván (szupernóvarobbanás). A természetben található elemek (a hidrogén és a hélium (ösrobbanás) kivételével) mind csillagokban és szupernóvákban jöttek létre.

A magfúzió számunkra elsősorban energiatermelési szempontból fontos. Ahhoz, hogy egy fúziós reakció ilyen szempontból érdekes legyen, a következő feltételeknek kell teljesülnie:

- exoterm legyen (energiát termeljen);
- kicsi legyen a protonok száma (kisebb Coulomb-taszítás), tehát a legkönnyebb elemekről lehet szó;
- két kiindulási anyagból (legalább) két reakciótermék keletkezzen (energia- és lendületmegmaradás).

Ezek alapján a lehetséges reakciók:



### 7.1.5. Feladatok

#### 1. feladat. (98-1-6)

Földünkön előforduló hélium két stabil izotópja a ritka  ${}^3\text{He}$ - és a gyakoribb  ${}^4\text{He}$ -izotóp. A levegőben a  ${}^3\text{He}$  koncentrációja jóval nagyobb, mint a földgázban.

(a) Vajon hogyan alakulhatott ki ilyen eltérés? (*Gondoljunk arra, hogy a földgáz a Föld belsejéből ered, ahol nagy a radioaktivitás.*)

(b) Ha a földgázt tartósan a felszínen tároljuk, akkor milyen változást várunk a földgáz  ${}^3\text{He}$ -koncentrációjában?

#### 2. feladat. (99-1-6)

Ha egy atommagban túl sok a proton, ettől proton-neutron átalakulással szabadul meg. Ez történhet elektronbefogással, vagy pozitronkiszugárással. Vajon elektronbefogó, vagy pozitronemittáló izotóp van-e több?

#### 3. feladat. (00-1-8)

Tudjuk, hogy rendszámnövelő, illetve rendszámcsökkentő béta-bomlások az atommagok energiavölgyének két különböző oldalán lévő atommagoknál jönnek létre. Ezért azt várnánk, hogy nincs olyan atommag, amely egyszerre lenne negatív béta-bomló (rendszámnövelő) és elektronbefogó (rendszámcsökkentő). A  ${}^{40}\text{K}$  izotóp azonban 88%-os valószínűséggel negatív béta-bomló, 12%-os valószínűséggel pedig elektronbefogással bomlik. (Nemcsak a  ${}^{40}\text{K}$  ilyen, vannak még más ilyen atommagok is). Hogyan lehetséges ez?

#### 4. feladat. (01-1-2)

Mit gondol, lehet-e a 232-es tömegszámú és 90-es rendszámú tórium bomlási sorának

végterméke a 207-es tömegszámú és 82-es rendszámú ólomizotóp? Kérjük, indokolja válaszát.

**5. feladat.** (01-1-3)

Az  $\alpha$ -bomlást gyakran kíséri  $\beta^-$ -bomlás, de  $\beta^+$ -bomlás és elektronbefogás nem. Mit gondol, mi lehet ennek az oka?

**6. feladat.** (02-1-4)

Hevesy György uránbomlásból származó radioaktív ólmot használt az ólom nyomon követésére. A radioaktív nyomjelzés felfedezéséért kapott Nobel-díjat. A nyomjelzést biológiai folyamatok vizsgálatánál is akarta használni, de a biológiailag fontos elemeknek nincs természetes radioaktív izotópja. Mit tett Hevesy?

**7. feladat.** (02-1-5)

A neutronaktivációs analízis során zömmel  $\beta$ -bomló izotópok keletkeznek. A  $\beta$ -bomlás során keletkező atommag gerjesztett állapotú, s ezért gamma-sugárzást bocsát ki. Az izotópok azonosítására ezeket használják. Miért? Indokoljon.

**8. feladat.** (98-2-1)

A nehéz atommagok – így a  ${}^{235}_{92}\text{U}$ -mag is – könnyen hasadnak neutronok hatására közepesen nehéz atommagokra. A hasadványok radioaktívak,  $\beta^-$ - és  $\gamma$ -sugárzást bocsátanak ki.

(a) Vajon miért nincs a hasadványok között  $\alpha$ - és  $\beta^+$ -sugárzó?

(b) Az uránmag hasadásakor miért nem keletkeznek szabad protonok?

**†9. feladat.** (00-2-1)

Milyen lenne a világ, ha a neutron tömege egy ezrelékkel kisebb lenne (a jelenlegi tömeg 0,999-szerese)? Jelenleg a neutron tömege  $1,6749543 \cdot 10^{-27}$  kg. Adatok: A proton tömege  $1,6726486 \cdot 10^{-27}$  kg, az elektron tömege pedig  $9,109534 \cdot 10^{-31}$  kg.

**10. feladat.** (01-2-2)

Az  ${}^{238}\text{U}$  bomlássorozatának stabil végterméke az  ${}^{206}\text{Pb}$ . Hány  $\alpha$ - és hány  $\beta$ -bomlás történik a bomlássorozatban?

**11. feladat.** (02-2-7)

A pozitív és negatív béta-bomlások során keletkező neutrínóknak (antineutrínóknak) az energiája folytonos eloszlású. Az elektronbefogás esetében azonban mindig jól meghatározott energiájú neutrínók keletkeznek. Mi lehet ennek az oka?

**12. feladat.** (99-1-7)

A  ${}^{14}\text{N}$  kötési energiája 16,19 pJ, a  ${}^{14}\text{C}$  kötési energiája 16,37 pJ. Melyik atommag bomlik a másikra és miért?

**13. feladat.** (99-1-10)

Miért radioaktívak az urán hasadási termékei?

**14. feladat.** (01-1-6)

A szabad neutron nem stabil részecske, kb. 15 perc felezési idővel elbomlik. Mit gondol, miért nem bomlanak el az atommagban előforduló neutronok?

**15. feladat.** (02-1-3)

Milyen lett volna Földünk, ha nem lettek volna a belsejében természetes radioaktív izotópok?

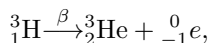


**16. feladat.** (02-1-8)

Az atommagok kötési energiájának ismeretében győződjön meg arról, hogy az elektronbefogással bomló  $^{37}\text{Ar}$  atommag a radioaktivitás más típusával nem bomolhat. Kötésienergia-adatok:  $^{37}\text{Ar}$ : 50,481 pJ,  $^{37}\text{Cl}$ : 50,736 pJ,  $^{37}\text{K}$ : 49,372 pJ.

**17. feladat.** (98-2-3)

A  $^3\text{H}$ -mag kötési energiája 1,334 pJ, a  $^3\text{He}$ -mag kötési energiája pedig csak 1,214 pJ. Ennek ellenére létrejön az alábbi bomlás:



ahol a keletkező béta-részecske energiája  $2,88 \cdot 10^{-15}$  J. Hogyan lehetséges ez, nem sérül az energiamegmaradás elve? (Válaszát számszerű adatokkal is támassa alá.)

**18. feladat.** (01-2-4)

Milyen lenne a Föld, ha nem volna benne urán, tórium,  $^{40}\text{K}$ ?

**†19. feladat.** (01-2-10)

A  $^{210}\text{Po}$   $\alpha$ -sugárzó. A bomláskor keletkező  $\alpha$ -részecskék a fémpolóniumban rövid úton lefékeződnek, leadott mozgási energiájuk megnöveli a fém belső energiáját, ezért a polóniumgolyó fölmelegszik. Polóniumgolyót gyakran használnak mesterséges holdak energiaforrásaként. Számítsd ki, mennyi watt/cm<sup>3</sup> a polóniumfém fajlagos hőteljesítménye. Becsüljük meg, mekkora sugarú polóniumgolyó marad szilárd halmazállapotban. Tételezzük fel, hogy a polóniumgolyó az energiát hősugárzás révén adja le, és a színe fekete. (A polónium sűrűsége 9,2 g/cm<sup>3</sup>, felezési ideje 138 nap, a kibocsátott  $\alpha$ -részecske energiája pedig 0,8 pJ. Egységnyi fekete felület sugárzási teljesítményét  $T$  abszolút hőmérsékleten a  $P = \sigma AT^4$  Stefan-Boltzmann-törvény írja le, ahol  $\sigma = 5,76 \cdot 10^{-8}$  watt/m<sup>2</sup>K<sup>4</sup> állandó.  $T$  hőmérsékletű fém belső energiája az ekvipartíció tétele szerint  $E = 3NkT$ , ahol  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $N$  pedig a fémgolyót alkotó atomok száma.)

## 7.2. Radioaktivitás

Az  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -bomlás közös neve: radioaktivitás. A radioaktív magok bomlását valószínűségi törvények írják le, az atommagok átalakulása sorsszerű, „fatális”.

### 7.2.1. Fogalmak

A *felezési idő* az az időtartam, amely alatt az  $N(0)$  radioaktív atommagok fele elbomlik. Jele:  $T, T_{1/2}$ .

A  $t$  idő múlva a megmaradt radioaktív atommagok száma (*radioaktív bomlástörvény*):

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-t/T}. \quad (7.1)$$

Egy anyagdarab radioaktivitását a benne időegység alatt lezajlott bomlások számával jellemezhetjük, ez az *aktivitás*. Jele:  $A$ , mértékegysége:  $\frac{\text{bomlás}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{Bq}$  (becquerel). Az aktivitás, az anyagmennyiség, és a felezési idő között a következő kapcsolat

áll fenn:

$$A(t) = \frac{\ln 2}{T} N(t). \quad (7.2)$$

Ebből és a bomlástörvényből könnyen következik:

$$A(t) = A(0) \cdot 2^{-t/T}. \quad (7.3)$$

A *bomlásállandó* az a valószínűség, amellyel egy radioaktív mag időegység alatt elbomlik. Jele  $\lambda$ , kiszámításának módja:  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ , az aktivitás kifejezése:  $A = \lambda N$ .

### Megjegyzések.

1. A  $\gamma$ -bomló izotópok felezési idejének jellemző nagyságrendje  $10^{-20}$  s-tól ns-ig terjed (a ns-nál hosszabb felezési idővel bomló atommag-állapotokat *izomér állapotok*nak nevezzük; a leghosszabb felezési idejű izomér állapot felezési ideje  $10^{15}$  év).  
A  $\beta$ -bomló izotópok jellemző felezési ideje néhány perctől néhány ezer évig terjed.  
Az  $\alpha$ -bomló izotópok jellemző felezési ideje néhány hónaptól több milliárd évig terjed.
2. Uránon túli ( $Z > 92$ ) elemek azért nincsenek a Földön, mert felezési idejük jóval kisebb, mint a Föld 4,6 milliárd éves kora.
3. A vegytiszta (reaktortiszta) urán kézben tartható. (Az  $^{235}\text{U}$  felezési ideje kb. 710 millió év, az  $^{238}\text{U}$ -é kb. 4,51 milliárd év, így az aktivitásuk csekély.)
4. A bomlási sorokkal kapcsolatban volt arról szó, hogy a bomlás során keletkezett mag (leányelem) is lehet radioaktív. Ha a bomlási sor első tagjának különösen hosszú a felezési ideje, akkor bizonyos idő alatt a bomlási sor tagjai között *radioaktív egyensúly* állhat be, azaz minden tagból annyi keletkezik, amennyi elbomlik, tehát az egyes elemek aktivitása megegyezik:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots \rightarrow N_1 : N_2 : N_3 : \dots = T_1 : T_2 : T_3 : \dots \quad (7.4)$$

**1. példa.** Számítsuk ki, hogy a Curie házaspárnak mennyi uránszurokércet kellett feldolgoznia, hogy 1 g tiszta rádiumot előállítson (a rádium felezési ideje 1602 év).

**Megoldás.**

$$N_{\text{U}} : N_{\text{Ra}} = T_{\text{U}} : T_{\text{Ra}} \rightarrow N_{\text{U}} = N_{\text{Ra}} \frac{T_{\text{U}}}{T_{\text{Ra}}}$$

$$\frac{m_{\text{U}}}{M_{\text{U}}} = \frac{T_{\text{U}}}{T_{\text{Ra}}} \frac{m_{\text{Ra}}}{M_{\text{Ra}}} \rightarrow m_{\text{U}} = M_{\text{U}} \frac{T_{\text{U}}}{T_{\text{Ra}}} \frac{m_{\text{Ra}}}{M_{\text{Ra}}} = 2960 \text{ kg}$$

A bomlási sor többi tagja az eredményt csak kissé befolyásolja, azonban az érc számos, nem radioaktív anyagot is tartalmaz; a Curie házaspár a valóságban kb. 10 tonna ércet dolgozott fel.

További javasolt feladatok a Moór Á.-féle példatárból: 1621., 1622., 1623., 1631.

### 7.2.2. Radioaktív órák

Az atommagok radioaktív bomlását nem befolyásolják mechanikai, hőmérsékleti, kémiai (mindennapi) hatások, ezért a radioaktivitást elromolhatatlanul működő óráként lehet felhasználni. Nehézséget okozott, hogy az élő szervezetben nagyrészt kis

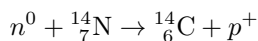
tömegszámú, stabil magok vannak. Hevesy György 1935-ben vezette be a *neutron-aktiválás* módszerét: stabil elem magjába neutront löve az radioaktívvá tehető. Így terjedt el pl. a radiofoszforos biológiai nyomjelzés, vagy például a pajzsmirigy működésének vizsgálata radioaktív jóddal (manapság elterjedten használják a 6 óra felezési idejű technéciumot is).

**2. példa.** A tápanyag felszívása és a szervezetbe beépülése gyakran nyomon követhető  $^{32}\text{P}$  radioaktív izotóp megfigyelésével. A laboratóriumba ma érkezett meg az  $1,6 \cdot 10^6$  Bq aktivitású izotóp. Mennyi idő múlva lesz  $10^5$  Bq az aktivitás? ( $T = 14,3$  nap.)

**Megoldás.** Használjuk az aktivitás csökkenésének összefüggését (7.3). Behelyettesítve és rendezve:

$$\frac{1}{16} = 2^{-t/T} \rightarrow 16 = 2^{t/T} \rightarrow 4 = \frac{t}{T} \rightarrow t = 4T = 57,2 \text{ nap} \approx 57 \text{ nap}.$$

**3. példa.** A kozmikus sugárzásban érkező nagyenergiájú részecskék a földi légkörben magátalakulásokat okoznak. Az érkező neutronok a levegő nitrogénjét



szerint radiokarbonná alakítják. A  $^{14}\text{C}$  (radiokarbon) felezési ideje  $T = 5700$  év. A légkörben radioaktív egyensúly áll be: a légköri szén-dioxid szénatomjainak  $10^{-12}$  része radiokarbon.

Ha a szén élő szervezetbe kerül, és a szervezet elhal (pl. épületfában, papírban, ruhában, múmiában, ... jelenik meg), a szén nem kap radiokarbon-utánpótlást, a koncentrációja fogyni kezd.

Egy régészeti leletben a radiokarbon részaránya  $1 : 4 \cdot 10^{12}$ . Milyen régi a lelet?

**Megoldás.** A bomlástörvényből:

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-t/T} \quad / : N$$

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{12}} = \frac{1}{10^{12}} \cdot 2^{-t/T}$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-t/T} \rightarrow \frac{t}{T} = 2 \rightarrow t = 2T = 11400 \text{ év}$$

A fizika segíti, igazolja a régészetet. Hazánk őstörténetének nincsenek írott emlékei, így nálunk a radiokarbon-kormeghatározásnak különleges jelentősége van.

**4. példa.** A napszéllal trícium kerül a földi légkörbe. Az esővíz hidrogénjéből minden  $10^{18}$ -adik atommag trícium, amelynek felezési ideje 12 év. Az esővizet a szőlő felszívja, a belőle készült bort palackba zárják, ekkor a trícium részaránya fogyni kezd a radioaktív bomlástörvény szerint. Megmérve a bor tríciumarányát, következtetni lehet a bor korára (hasonlóan történik a talajvízvizsgálat is).

**5. példa.** Kőzetek korának meghatározása kálium-argon órával.

A kálium a földkéreg gyakori eleme. Ennek 0,0118%-a a radioaktív  $^{40}\text{K}$ . Kőbe zárt káliumból  $T = 1,28 \cdot 10^9$  év felezési idővel elektronbefogással  $^{40}\text{Ar}$  keletkezik, ami a kőzetben fogságban marad. Amennyivel a  $^{40}\text{K}$  fogy, annyi  $^{40}\text{Ar}$  keletkezik:

$$N_{\text{Ar}}(t) = N_{\text{K}}(0) - N_{\text{K}}(t) = N_{\text{K}}(0) \left(1 - 2^{-t/T}\right).$$

A  $^{40}\text{K}$  és a  $^{40}\text{Ar}$  magok ma mérhető aránya megadja a kő megszilárdulása óta eltelt időt:

$$\frac{N_{\text{Ar}}(t)}{N_{\text{K}}(t)} = \frac{N_{\text{K}}(0) (1 - 2^{-t/T})}{N_{\text{K}}(0) 2^{-t/T}} = 2^{t/T} - 1.$$

Grönlandon találtak olyan kőzetet, amelyben ez az arány 7:1, amiből az következik, hogy a kőzet kb. 3,8 milliárd éve szilárdult meg.

### 7.2.3. Feladatok

#### 1. feladat. (99-1-2)

Hevesy 1923-ban egy urántartalmú kőzet életkorát annak alapján határozta meg, hogy a benne lévő  $^{238}\text{U}$  és  $^{206}\text{Pb}$  atomok aránya 2:3 volt. Hány évesnek találta ezt a kőzetet? Adatok: az  $^{238}\text{U}$  felezési ideje  $4,51 \cdot 10^9$  év.

#### 2. feladat. (99-1-4)

A Földről a nemesgázok javarészt megszöktek, amikor a Föld meleg volt. De a légkör egy százaléka  $^{40}\text{Ar}$ . Hevesy György mutatta ki, hogy ez a természetes  $^{40}\text{K}$  bomlásából keletkezett, amely 11%-ban elektronbefogással  $^{40}\text{Ar}$ -re bomlik. Adjunk ennek alapján egy becslést a Föld életkorára. Adatok: a  $^{40}\text{K}$  felezési ideje  $1,26 \cdot 10^9$  év. Az  $^{40}\text{Ar}/^{40}\text{K}$  előfordulási aránya: 0,9.

#### 3. feladat. (99-1-5)

Egy  $40 \text{ m}^3$  térfogatú szellőztetlen szobában, amelyből a Rn nem áramlik ki, a levegő aktivitáskoncentrációja  $600 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$ . Mennyi Rn áramlik be a padlón keresztül óránként a szobába?

#### 4. feladat. (00-1-5)

A Nagy Egyesítés elmélete szerint a proton sem teljesen stabil, hanem nagyon hosszú felezési idővel  $\pi^0$ -mezonra és pozitronra bomlik. Egy kísérletben 3300 tonna vizet 1 évig vizsgáltak, de nem tapasztaltak egyetlen protonbomlásra utaló eseményt sem. Milyen alsó határt ad ez a kísérlet a vízmolekulában lévő proton felezési idejére?

#### 5. feladat. (00-1-6)

Az 1986-os csernobili atomerőműbaleset következtében hazánkat is érő radioaktív légköri szennyeződés során az országban a levegő aktivitáskoncentrációja átlagosan  $1 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$ -rel nőtt, legnagyobb részét a 8 nap felezési idejű  $^{131}\text{I}$  izotóp következtében.

(a) Összesen hány gramm jódot érkezhetett hazánk légterébe?

(b) Összesen hány gramm radioaktív jódot szabadulhatott ki a csernobili sérült reaktorblokkból, ha a kiszabadult összakaktivitás  $10^{18}$  Bq volt? Tegyük fel, hogy ennek kb. 90%-a a jódtól származott.

#### 6. feladat. (01-1-10)

Egy, a Balkánon használt „szegényített” uránlövedékben 99,8% a  $^{238}\text{U}$  izotóp, és 0,2%  $^{235}\text{U}$ . Vajon miért dúsították fel költségesen a  $^{238}\text{U}$  izotópot? Becsapódáskor a lövedék szétporlik. Becsülje meg, mekkora lehet egy 1 mg-os uránszemcse aktivitása.

#### 7. feladat. (02-1-9)

Egy kis tóba  $3,7 \cdot 10^8$  Bq aktivitású  $^{24}\text{Na}$  atomokat tartalmazó nátrium-kloridot juttattak. 60 órával később – feltételezve, hogy a teljes összekeveredés már megtörtént

– 10 liter vízmintát vettek, és annak aktivitását 370 Bq-nek találták. Számítsa ki a tó térfogatát, ha tudjuk, hogy a  $^{24}\text{Na}$  felezési ideje 15 óra. Mit gondol, a radioaktív izotópot miért NaCl formában tették a vízbe?

**8. feladat.** (02-1-10)

Egy uránércdarabkában 100 millió  $^{233}\text{U}$  atom található. Az  $^{233}\text{U}$  izotóp felezési ideje 162000 év, és  $^{229}\text{Th}$ -ra bomlik, melynek felezési ideje 7340 év. Ez tovább bomlik  $^{225}\text{Ra}$ -ra, melynek felezési ideje fél év. Becsülje meg az uránércdarabban lévő  $^{225}\text{Ra}$  atommagok számát.

**†9. feladat.** (03-1-2)

A radioaktív izotópokat sokféleképpen használják. Segítségükkel hogyan lehetne megoldani a következő feladatokat:

- A műanyag fólia vastagságát a gyártás során folyamatosan kell ellenőrizni;
- Egy mezőgazdász tudni akarja, hogy paradicsombokraiba miként szívódik fel a frissen kihintett foszfortrágya;
- Egy kutatóorvos csökkenteni akarja a bizonyos területeket megfertőző légyraj nagyságát; (célzás: a hímnemű legyekre rossz sors vár)
- Egy agysebész a daganat helyét kívánja megállapítani?

**10. feladat.** (03-1-4)

Egy, a szájhagyomány szerint legalább 100 éve elsüllyedt hajót átkutatva a bűvár az egyik kabinban bontatlan whiskys üveget talált, amelyről azonban leázott a címke. Amikor egy laboratóriumban megmérték ennek a whiskynek a tríciumtól származó aktivitáskoncentrációját, azt találták, hogy az mindössze 3%-a az üzletben frissen vásárolt, és 7 éves címkével ellátott whisky aktivitáskoncentrációjának. Igazolható-e ezzel, hogy 100 éve süllyedt el a hajó? A trícium felezési ideje 12,3 év.

**11. feladat.** (03-1-7)

Megmérték egy múmiából vett minta  $^{14}\text{C}$ -től származó aktivitását. Ebből meg lehetett állapítani, hogy a mintában a  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  arány csak 69,2 százaléka annak, mint amit a mai növényekben mérnek. (A  $^{14}\text{C}$  felezési ideje: 5730 év). Becsülje meg a múmia korát! Milyen tényezőkre kell figyelni, amikor a minta mért aktivitásából a  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  arányra akarunk következtetni?

**12. feladat.** (03-1-8)

A Paksi Atomerőmű éves trícium kibocsátása  $15 \frac{\text{T Bq}}{\text{év}}$ , amely a hűtővízzel távozik.

- Mekkora tömegű trícium kerül ki a környezetbe 1 év alatt az erőműből? (A trícium felezési ideje 12,26 év.)
- Átlagosan hány százalékkal növeli ez meg a Duna vizének természetes, (1 Bq/liter) trícium aktivitáskoncentrációját? (Tegyük fel, hogy az összes kibocsátott trícium a Dunába kerül, és a kibocsátás év közben egyenletes. A Duna átlagos vízhozama  $2000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ .)

**13. feladat.** (03-1-9)

A természetben található stabil atommagokat négy csoportba oszthatjuk aszerint, hogy páros-e a protonjaik, illetve neutronjaik száma.

Z (protonszám)	N (neutronszám)	Magok száma
Páros	Páros	141
Páratlan	Páros	45
Páros	Páratlan	51
Páratlan	Páratlan	5

Tegyük fel, hogy a Föld keletkezésekor a különböző urán atommagok is ezen arányoknak megfelelően keletkeztek. Jelenleg a természetes uránban az  $^{235}\text{U}$  aránya 0,71%. Az  $^{235}\text{U}$  felezési ideje  $T_1 = 7,13 \cdot 10^8$  év, az  $^{238}\text{U}$  felezési ideje  $T_2 = 4,51 \cdot 10^9$  év. Becsülje meg a Föld életkorát ezen ismeretek felhasználásával.

**†‡14. feladat.**

A radioaktív bomlás statisztikus jellegű, a bomlástörvény a mért aktivitásértékek *várható értékét* adja meg. A radioaktív bomlás jellegzetességeit figyelembe véve határozzuk meg e várható aktivitás szórását, illetve adjuk meg, milyen eloszlás szerint lesznek megfigyelhetők az egyes aktivitásértékek. Mi a  $\lambda$  bomlásállandó fizikai jelentése egy mag számára?

**15. feladat.**

Állítsunk elő radioaktív mintát a következőképpen: egy porszívó csövét gézzel kössük be, majd egy feltehetően radonos helyiségben (pl. ritkán szellőztetett pince) járassuk kb. fél–egy óráig a levegőbe (ne a padlóról szívjuk fel a port, csak a levegőt áramoltassuk át rajta). A bekoszolódott gézt vegyük le a csőről, majd ugyancsak fél–egy órát mérjük Geiger–Müller-számlálóval a beütésszám időfüggését (célszerű egy perces időablakot beállítani és folyamatosan mérni). A mért adatok felhasználásával határozzuk meg a mintán kirakódott radioaktív anyag felezési idejét.



## 8. fejezet

# Nukleáris energiatermelés

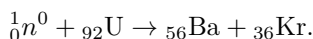
### 8.1. Maghasadás

A 30-as években, a neutron felfedezése után, a magfizikusok előszeretettel sugároztak be atommagokat neutronokkal és megvizsgálták a létrejövő radioaktív atommagok viselkedését. A felhasznált *neutronforrások* többnyire rádiumot és berilliumot tartalmaztak. A rádium spontán  $\alpha$ -bomlik, ebből  ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0n$  szerint neutron keletkezik.

A neutronnal besugárzott atommagok gerjesztett állapotba kerülnek, ahonnan  $\gamma$ ,  $\beta$  ( $\gamma$ ), vagy  $\alpha$  ( $\beta$ ,  $\gamma$ ) bomlásokkal térhetnek alapállapotba (így állítják elő a gyógyászatban, iparban, mezőgazdaságban alkalmazott radioaktív izotópokat, pl.  ${}^{32}\text{P}$ ). A besugárzott magok jól meghatározott felezési idővel és energiával bomlanak el.

*Enrico Fermi* uránt is besugárzott, melynek hatására sokféle és intenzív aktivitás jött létre. A jelenséget (helytelenül) úgy értelmezte, hogy a neutron az uránmagba fogódva  $\beta$ -bomlások során beállította a számára kedvező  $p^+ : n^0$  arányt, eközben transzurán elemek jöttek létre. (Fermi részben ezért kapott 1938-ban Nobel-díjat.)

*Otto Hahn* és *Fritz Strassmann* 1938-ban Berlinben kémiaileg azonosította a Fermi-féle „transzurán” elemeket. A reakciótermékből radioaktív báriumot különítették el. Ezt úgy lehetett értelmezni, hogy az urán maghasadással báriumra és kriptonra hasadt:



A maghasadás felfedezéséért Hahn 1944-ben megkapta a kémiai Nobel-díjat. *Lise Meitner* értelmezte a maghasadást energetikailag.

#### Mikor jár a maghasadás energia felszabadulásával?

Használjuk az energia (6.1) képletét. Egy  $A$  tömegszámú,  $Z$  rendszámú mag hasadjon két egyenlő részre. A térfogati energia nem változik, tehát akkor szabadul fel



energia, ha a Coulomb-energia csökkenése nagyobb, mint a felületi energia növekedése:

$$E(A, Z) - 2E\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) = \varepsilon_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}(1 - 2^{-2/3}) - \varepsilon_F A^{2/3}(2^{1/3} - 1) > 0.$$

Ez akkor teljesül, ha  $\frac{Z^2}{A} > 18$ .

A számítás szerint a  $Z > 42$  magok hasadása energiateljesítményekkel jár. Az atommagok hasadása mégsem következik be azonnal, mert a magoknak előbb meg kell nyúlnia, be kell fűződnie, és a felületnövekedés energiabefektetést igényel.  $Z > 117$  esetén az atommag megnyúlását a Coulomb-energia eközbeni kismértékű csökkenése fedezi, így az atommag születése pillanatában szétesik. A periódusos rendszer ezért itt véget ér.

A természetben megtalálható – többé-kevésbé stabil – atommagok felületnövekedéséhez szükséges *aktiválási energia* pJ nagyságrendű. A földi környezet azonban csak  $kT \approx 10^{-21}$  J energiájú ütközéseket produkál. Ezért nem hasadnak el a nehéz magok. (Alagúteffekttussal nagyon ritkán történik természetes maghasadás, például az  $^{238}\text{U}$ -magban minden kétmillió  $\alpha$ -bomlásra jut egy.)

Hahn és Strassmann vizsgálta a két uránizotóp ( $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ) neutron által indukált hasadását. Ha  $^{235}\text{U}$ -izotóp befog egy neutron, akkor páros-páros mag lesz belőle. Ez a mag *kis sebességű neutron* hatására is hasad (az  $^{238}\text{U}$  nem), és a hasadása során felszabaduló energia nagyobb az aktivációs energiánál. *Az  $^{235}\text{U}$  hasadása energianyereséggel jár.* Nagy sebességű neutron mindkét izotópot elhasítja ugyan, de a gyors neutron által kiváltott maghasadásnak kicsi a valószínűsége ( $\frac{1}{v}$  törvény).

Nagy magokban nagy a neutronok aránya, ezért hasadáskor a két kisebb mag keletkezésekor neutronok is repülnek ki. A hasadás pillanatában keletkező neutronokat *azonnali (prompt) neutronok*nak nevezzük. A hasadványok neutrontúlsúlyosak, emiatt radioaktívak,  $\beta$ -bomlóak. Eközben olyan mag is kialakulhat, amelyből neutron repül ki. E neutronok kijöttét a  $\beta$ -bomlás lassítja, ezeket *késő neutronok*nak nevezzük.

**Megjegyzés.** Már a XV. századtól ismeretes, hogy a bányászoknál sokkal gyakoribb a tüdőrák. Ennek oka, hogy az urántartalmú talajból kiszivárgó Rn (uránból elbomlott nemesgáz) és annak radioaktív bomlástermékei zárt terekben felszaporodnak. Többségük  $\alpha$ -bomló, így belelegezve erősen károsítják a szervezetet (tüdőfalat).

Tóth Eszter tanárnő 1992-től Mátraderesken, és azóta már több, mint száz faluban méri a lakóterei radonmennyiség hosszútávú változásait. A magyar lakosság radioaktív dózisának több, mint a fele származik a radonnak, valamint annak bomlástermékeinek belélegzésétől. A lakóhelyek radonmentesítése  $400 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  aktivitáskoncentráció felett szükséges (több módszere létezik).

### 8.1.1. Feladatok

#### 1. feladat.

Fermi Olaszországban neutronnal idézett elő magátalakulásokat. Azt tapasztalta, hogy faasztalon hatékonyabb a magátalakulás, mint márványasztalon. Mi ennek az oka?

**2. feladat.**

Mit gondolsz, hogyan lehet a földszinti lakás radonszintjét csökkenteni?

**8.2. Magfizikai láncreakció**

A tűz sok veszélyt hordoz. Ezzel együtt az őskortól a késő újkorig a tűz jelezte az élet középpontját sötétedés után, meleget, védelmet a vadak ellen, összetartozást fejezett ki. Fényt, hőt adott, és lehetőséget a meleg ételek elkészítésére. Mi a tűz? Kémiai láncreakció. Az éghető anyag egy molekulájának oxidációjához energiát kell közölni vele (*aktivációs energia*). Az oxidáció során több energia szabadul fel, mint a befektetett, így ez az energia képes más molekulákat aktiválni, . . . Ezt a folyamatot nevezzük *kémiai láncreakciónak*. A felületen az energia egy része a környezetbe áramlik, és nem az éghető anyagra koncentrálódik. Így a láng felszíne nem lehet bármilyen nagy. A láng nem lehet bármilyen kicsi sem, hisz az éghető anyag felszíne határozza meg, hogy mennyi oxigént tud felhasználni. Ha olyan anyagban hozunk létre kémiai láncreakciót, amely a szükséges oxigént is tartalmazza, akkor a láncreakció robbanáshoz vezet. A robbanószerek molekulái nagy oxigéntartalmúak.

1933. *Rutherford* Londonban tartott előadást. Itt mondta: „. . . , de aki az atommag energiájának gyakorlati alkalmazására gondol, az holdkóros.” *Szilárd Leó* egy újságcikkben olvasott az előadásról. Nem szerette, ha valamire azt mondták, hogy lehetetlen. Még aznap, a Southampton Row-n egy gyalogátkelőhelyen, ahogy a piros lámpa sárgára, majd zöldre váltott, hirtelen eszébe ötlött: „Ha találnánk egy elemet, amelyet a neutron szétver, és eközben két neutron keletkezik, ilyen elemből elegendő mennyiséget összegyűjtve, önmagát fenntartó láncreakció jöhetne létre.” Először a berilliumra gondolt. A  ${}^8\text{Be}$  nem stabil, önként két  ${}^4\text{He}$ -maggá bomlik. Szilárd elképzelése szerint a létező  ${}^9\text{Be}$  izotópba neutron löve, az így keletkező  ${}^{10}\text{Be}$ -mag két neutron kibocsátásával  ${}^8\text{Be}$ -cá alakul, amely elbomlik. A folyamat azonban nem hoz létre önfenntartó láncreakciót, ugyanis a reakció során felszabaduló energia éppen elegendő a két neutron szabaddá tételéhez, hőenergia alig szabadul fel. Ez nem elegendő a  ${}^9\text{Be}$  aktiválásához, nem jöhet létre láncreakció.

Szilárd Leó 1934 nyarán Angliában szabadalmaztatta a nukleáris láncreakciót.

A német fizikusok által felfedezett maghasadás hírére 1939 elején *Bohr* vitte Amerikába. Szilárd hallotta Bohr előadását, ekkor jött rá: maghasadás során szabad neutronok is keletkezhetnek. Hátha a maghasadás a keresett „holdfény-jelenség”. Szilárd meggyőzte az akkor már Amerikában élő *Fermi*t, hogy fontos lenne kideríteni, hogy a maghasadás során hány neutron keletkezik. Ő New Yorkban, *Fermi* Chicagóban ugyanarra az eredményre jutott: *2-nél több neutron keletkezik. Joliot-Curie* is hasonló eredményre jutott Franciaországban. Szilárd titkosíttatni akarta az eredményt, de *Joliot-Curie* erre nem volt hajlandó, így 1939 nyarán mindhárman közzétették eredményeiket. Szilárd Leó látta a felfedezés katonai jelentőségét. Levelet fogalmazott Roosevelt elnöknek, amelyet Einstein írt alá. Ennek eredményeként indult el a *Manhattan-terv*.

A maghasadással kapcsolatban tanultuk, hogy a *gyors neutron* mindkét uránizotópot elhasítja, és ekkor kettőnél több neutron keletkezik. A gyors neutron viszont kevés ideig van a mag közelében, ritkán hasít ( $\frac{1}{v}$  törvény). A sorozatos ütközések hatására

a neutron lelassul, termikussá válik. A *termikus neutron* már hosszú ideig tartózkodik a mag közelében, nagyobb valószínűséggel fogódik be. Így az  $^{238}\text{U}$ -ból gerjesztett  $^{239}\text{U}$  keletkezik, ami  $\gamma$ -, majd két  $\beta$ -bomlással  $^{239}\text{Pu}$ -cé alakul. Az  $^{235}\text{U}$ -mag termikus neutron befogására is többnyire elhasad.

*Magfizikai láncreakció* akkor jön létre, ha  $n$  számú hasadásban keletkezett neutron közül legalább  $n$  okoz hasadást.

Ha egy tisztán  $^{238}\text{U}$ -magot tartalmazó uránban okoznánk  $n$  maghasadást, akkor a keletkező  $2n$ -nél több gyors neutron kis része okozna újra maghasadást, nagy része lelassulna, és hasadás nélkül befogódna az uránba. Tiszta  $^{238}\text{U}$ -ban nem fejlődhet ki a láncreakció.

Ha egy tisztán  $^{235}\text{U}$ -magot tartalmazó uránban okoznánk  $n$  hasadást, akkor körülbelül  $2,4n$  számú gyors neutron keletkezik. Ennek csekély része hasít, a többi lelassul, és ugyancsak hasít (néha hasadás nélkül is befogódhat neutron). Tehát a tisztán  $^{235}\text{U}$ -magot tartalmazó anyagban létrejöhet láncreakció. Neutronveszteség léphet viszont fel úgy, hogy a neutron kirepül az urántömbből. Ezt úgy csökkenthetjük, hogy az urántömbnek gömb alakot adunk, és a tömböt egy *kritikus méret* fölé növeljük (ez a tiszta  $^{235}\text{U}$  esetén kb. 17 cm).

$^{238}\text{U}$ -ban semmilyen méret mellett nem jöhet létre láncreakció. A természetes uránnak csak 0,7%-a  $^{235}\text{U}$ , ebben sem jöhet létre láncreakció.  $^{235}\text{U}$ -ban dúsított uránban a dúsítás mértékétől függően létezik olyan kritikus méret, amely fölött a láncreakció már önfenntartó.

Ha  $n$  maghasadásban keletkezett neutronok közül  $n'$  idéz elő újabb hasadást, akkor a  $k = \frac{n'}{n}$  arányt *effektív sokszorozási tényezőnek* nevezzük.  $k$  értéke függ az anyagdarab méretétől (térfogat-felület arány) és összetételétől.

Ha  $k \geq 1$ , akkor létrejön láncreakció,  $k < 1$  esetén nem.

A 2. világháborúban a katonai nagyhatalmak hatalmas harcot indítottak a megálmodott új csodafegyverért, a magfizikai láncreakción alapuló *atombombáért*. Németországban *Werner Heisenberg*, a Szovjetunióban *Igor Kurcsatov* vezette az atombombaprogramot. Az USA-ban a Szilárd-levél indította be a Manhattan-terv keretében a kutatásokat.

## 8.2.1. Feladatok

### 1. feladat. (03-1-1)

Miként merült fel Szilárd Leóban a láncreakció ötlete? Milyen elemmel kívánta először megvalósítani?

### 2. feladat. (99-2-8)

Szilárd Leó és Walter Zinn megmérte, hogy az  $^{235}\text{U}$ -ból hasadásonként átlagosan 2,5 neutron keletkezik. Tekintsünk egy képzeletbeli reaktorban 100 db maghasadást. Az ezekből létrejött neutronok közül 10 kiszökik a reaktorból, 8 elnyelődik a hűtővízben, 40 befogódik az  $^{238}\text{U}$ -ban, valamennyit elnyelnek a szabályozórudak, a többi pedig ismét hasít. A neutronok hány százalékát kell elnyelni a szabályozórudaknak, hogy a neutronok száma időben ne változzék?

### 8.3. Atomreaktor, nukleáris energiatermelés

Természetes uránban sosem indul meg önfenntartó magfizikai láncreakció. A megoldást Fermi és Szilárd 1939-ben találta meg. A hasadáskor keletkező gyors neutronokat ki kell vezetni az urántömbből, és megfelelő közeggel (*moderátor*) le kell lassítani (termikussá kell tenni) őket, így az uránba visszatérve már csak az  $^{235}\text{U}$ -öt hasítják. Ez az urán és a moderátor *inhomogén* elrendezését jelenti. Moderátornak olyan anyag alkalmas, melynek atommagjai kis tömegszámúak (könnyű elemek), így hatékonyan lassítják a neutronokat, feltéve, hogy csak kevés neutront nyelnek el.

Az első atomreaktor Chicagóban épült. 6 tonna természetes uránból készült urángolyót helyeztek el 315 tonna grafitban (*atommáglya*). A grafit volt a moderátor. A reaktorban neutronelnyelő kadmiumrudak voltak a láncreakció szabályozására. Egy  $\text{Ra}+\text{Be}$  neutronforrás biztosította az induláshoz a neutronokat. 1942. december 2-án a láncreakció önfenntartóvá vált. (Ezt nevezzük *második tűzgyújtásnak* is.) A munkálatok vezetői *Arthur Compton, Enrico Fermi, Szilárd Leó* és *Wigner Jenő* voltak. Az atomreaktor szabadalma Fermi és Szilárd nevére szól. Az atommáglya teljesítménye kb. 0,5 W volt (néhány LED fogyasztásával egyenértékű). A leghatékonyabb moderátorközegnek a víz ( $\text{H}_2\text{O}$ ) adódik, a benne levő nagy mennyiségű, jó neutronlassító proton miatt. A proton azonban kis valószínűséggel el is nyel neutront, így deuteronná alakul. Természetes uránból és vízből nem építhető atomreaktor: a felületi megszökés valamint a  $^{238}\text{U}$  és a hidrogén befogása miatt. A probléma megoldására két módszer adódik:

- Moderátor közegnek *nehésvizet* is használhatunk, ez nagyon ritkán nyel el neutront. A nehézvíz előállítása költséges, viszont a reaktor természetes uránnal is működik. Ilyen reaktorokat gyárt a kanadai *CANDU* cég. (Romániában is működik ilyen reaktor, a hozzá szükséges nehézvizet a Vaskapunál állítják elő.)
- Ha moderátornak *könnyűvizet* használunk, akkor üzemanyagnak kb. 2–3%-osan dúsított uránt kell használni, amelyet urán-dioxidként kis (kb. 2 cm-es) hengerekre préselnek. A hengereket jól záródó cirkóniumköpenybe zárják, ezeket kötegekbe teszik. A kötegek kerülnek a reaktortestbe, amelyben könnyűvíz van. A víznek ekkor három feladata van:

- moderátorként lelassítja (termalizálja) a gyors neutronokat,
- hűti a közegeket,
- közvetíti a hőt a turbinákhoz.

Az energetikai célú könnyűvízes reaktoroknak két típusa van: a *nyomottvízes reaktorokban* a víz nyomása olyan magas, hogy a reaktortartályban az nem forr fel, a *forralóvízes reaktorokban* azonban már a reaktortartályban elforr a víz, a keletkező gőzt vezetik a turbinákhoz.

A reaktornak a *neutronháztartás* szempontjából 3 állapota van (ha  $n$  hasadásban keletkezett neutronok közül  $n'$  idéz elő újabb hasadást, akkor a  $k = \frac{n'}{n}$  arányt effektív sokszorozási tényezőnek nevezzük):

- kritikus:  $k = 1$  (atomreaktor, állandó üzem mellett)

- szubkritikus:  $k < 1$  (atomreaktor, leállításkor)
- szuperkritikus:  $k > 1$  (atomreaktor, indításkor)

Ha hasadások csak azonnali neutronok keletkeznének, azok pici élettartama (kb.  $10^{-5}$  s) nem tenné lehetővé a láncreakció szabályozását. A keletkező neutronok 6 ezrelékének megjelenését a  $\beta$ -bomlás viszont másodpercekre nyújtja, ami elegendő idő a láncreakció szabályozására. A reaktort ezért úgy kell megtervezni, hogy csak azonnali neutronokkal a rendszer szubkritikus legyen, a kritikus (szuperkritikus) állapot már csak a *késő neutron*okkal valósuljon meg. Az atomreaktorban folyamatos, szabályozott a láncreakció. A láncreakció *szabályozása* a fűtőkötegek közötti Cd-rudak mozgatásával és a hűtővíz börtartalmának változtatásával történik (mindkét anyag jó neutronelnyelő). A reaktor indítása előtt a víz börtartalma magas, a kadmiumrudak a kötegek közé vannak eresztve, ekkor szubkritikus a rendszer. A vízben lévő bórsav hígításával  $k$  megközelíti az 1 kritikus értéket. Az elnyelő rudak felemelésével  $k$  1 fölé emelkedik, ekkor generációnként nő a neutronok, így a hasadások száma, emiatt pedig a hőteljesítmény. Az elnyelő rudak megfelelő mozgatásával a rendszer kritikussá tehető,  $k = 1$ , a hasadások száma állandó. A reaktorban kb. 120 atm nyomású, majdnem  $300\text{ }^\circ\text{C}$ -os (folyékony) víz áramlik. A víz a hő egy részét gőzfejlesztőbe adja le, majd a lehűlt vizet szivattyúk juttatják vissza a reaktorzónába. Ez a *primer kör*. A gőzfejlesztőben keletkező gőzt a *szekunder kör* juttatja a turbinákhoz. Az atomerőmű ezen része gyakorlatilag megegyezik egy hagyományos erőművel.

A primer és a szekunder kör is zárt, belőlük víz nem juthat a környezetbe. A paksi atomerőmű szekunder körét a Dunából kivett, alaposan megtisztított víz hűti. Az erőművet igen tiszta (nem radioaktív), néhány  $^\circ\text{C}$ -kal melegebb víz hagyja el, ez ömlik vissza a Dunába.

Ha a reaktorzónában a sokszorozási tényező tartósan nagyobb lenne egynél, akkor időről időre több energia szabadulna fel. Azt hihetnénk, hogy a láncreakció „megszalad”, a reaktor atombomba módjára robban fel. Nem ez történik. A növekvő energiatermelés miatt a moderátorként is szolgáló víz elforr, nem tölti be neutronlassító szerepét. A magára maradt reaktorban a láncreakció magától leáll, nem lesz belőle atombomba.<sup>1</sup>

A *Paksi Atomerőmű 4* (nyomottvizes) reaktorának mindegyikében 42 tonna fűtőanyag és 100 tonna moderátor víz van. Működés közben az aktív zónában jelentős változások mennek végbe. A fűtőkötegekben felgyűlnek a hasadványok, a hasadóképes urán pedig fogy. Ezen – a reaktor teljesítményét rontó – változások üteme attól függ, hogy a fűtőköteg a reaktor melyik részén helyezkedik el. Emiatt az aktív zónát évente átrendezik, az uránköteg viszont így is 3 év alatt kiürül, *kiég*.

A reaktor működése közben keletkező atommagok erősen radioaktívak, ezért nagyon fontos megakadályozni, hogy a környezetbe kerüljenek. Az aktív zónát emiatt vastag, nyomásálló, rozsdamentes acéltartály, a *reaktortartály* veszi körül. Ez a benne lévő anyagokat nem engedi ki a környezetbe. A reaktortartályt egy néhány méter vastag, különleges vasbetonból épített fal veszi körül. A beton kristályvíz- és nehézfém-

<sup>1</sup>A negatív visszacsatolás nem csak ilyen drasztikus módon működik: a kismértékű megszaladás felmelegíti a vizet, amely ezért kitágul, a moderálás hatékonysága kismértékben így is csökken: ez a negatív visszacsatolás teszi üzembiztossá a vizes reaktorokat.

(Ba, barit) tartalma miatt megakadályozza a neutron-, a béta- és a gamma-sugárzás kijutását is. Ezeket a szerkezeti elemeket úgy méretezik, hogy a várható legnagyobb földrengés se tehessen benne kárt. Az atomerőmű létesítési költségének túlnyomó része a legkorszerűbb biztonsági feltételek megvalósítására megy el – de megéri.

A kiegészítő rudakat öt évig vastag betonfallal körülvett vizes pihentető medencében tárolják, majd a kötegek az *átmeneti tároló*ba kerülnek (Pakson a 90-es évek közepén adták át). Itt a kazetták egy másfél méter vastag falú, földrengésálló kamrába kerülnek. A hűtést természetes léghűtés biztosítja, a kazettákban termelődő hőt a hőmérsékletkülönbség miatt kialakuló huzat viszi el. Itt 50–80 évig tárolják a rudakat. A radioaktív hulladék végleges elhelyezésénél gondolni kell arra, hogy veszélyes hulladék ne juthasson ki a tárolóból (számos hasadvány hosszú élettartamú). Erre a célra alkalmasnak látszanak elhagyott só- és uránbányák, agyaglencsék, vastag gránitrétegek. (Hazánkban Bábaapátiban található kis aktivitású hulladékok – nem fűtőelemek – számára végleges tároló egy gránitrétegben. A fűtőelemek végleges tárolása még nem megoldott, jelenleg ideiglenes tárolóban helyezik el őket az erőmű területén.)

A természetes urán csekély része (0,7%) a láncreakcióra használható  $^{235}\text{U}$ . A természetes urán nagy része, az  $^{238}\text{U}$  közepes sebességű neutron befogva, kétszeres bétabomlással  $^{239}\text{Pu}$ -cé alakul, ami már alkalmas láncreakció létrehozására (a gyakori  $^{232}\text{Th}$ -ből  $^{233}\text{U}$  keletkezik, amely szintén hasznosítható; egyik izotóp sem lelhető fel a természetben rövid felezési ideje miatt). Lehet olyan erőművet építeni, amelyben több  $^{239}\text{Pu}$  keletkezik, mint amennyi  $^{235}\text{U}$ -t a reaktor elhasznál. Az ilyen reaktornak csak a beindításához szükséges  $^{235}\text{U}$ . Szilárd és Wigner javaslatára ezeket a reaktorokat *tenyésztőreaktor*nak nevezzük. Néhány tenyésztőreaktor már működik, főleg Franciaországban és Japánban.

#### Megjegyzések.

1. A Földön jelenleg meglévő több mint 400 atomreaktor a világ elektromos energiatermelésének több, mint 18%-át adja. Magyarországon hat darab könnyűvízzel moderált reaktor működik: egy kutatóreaktor a KFKI-ban, egy oktatóreaktor a Műegyetemen és 4 energiatermelő reaktor Pakson. A paksi reaktorok 1375 MW hőteljesítményűek, és 500 MW (eleinte 440, majd 460, ...) villamos energiát termelnek. *Hazánkban az atomerőmű a villamos energia legolcsóbb forrása, ezért alaperőműként dolgozik: villamosenergia-fogyasztásunk kb. 40%-át fedezi.*
2. Az atomreaktor üzemeltetése komoly odafigyelést, szaktudást igényel. Sajnos történelem balesetek: 1957, Windscale; 1979, Harrisburg; 2011, Fukushima; a legsúlyosabb baleset 1986-ban *Csernobil*ban történt, ami – akárcsak a többi – emberi mulasztás vagy súlyos, előre nem várható természeti katasztrófa következménye volt. A csernobili grafit moderátorú, vízű hűtésű reaktor volt. A mérnökök nem kellően átgondolt kísérlete miatt a reaktor szuperkritikussá vált, és a grafitmoderátoros reaktorok alapvető hibái miatt túlhevült. „Szerencsére csak” kémiai robbanás történt: ennek közvetlenül 31 fő esett áldozatul, de a kiszabadult radioaktivitás összes halálos áldozatainak számát is maximum 30 ezerre teszik. Ez a szám megegyezik a világ szénerőműveinek 5 évi működésének, vagy a legnagyobb hidrogénbomba robbanásának kollektív kockázatával. *A fukushimai atomerőmű-balesetet nem gondatlanság okozta: egy cunami rongálta meg a reaktort, így jutott sugárzás a környezetbe. E baleset várható áldozatainak száma nem több 100-nál, miközben maga a cunami tízezrek halálát okozta.*
3. 1972-ben egy francia uránércdúsító telepen az Oklóból (Gabon) származó urán egyes tömbjeiben az  $^{235}\text{U}$  részaránya 0,4% vagy még ennél is kevesebb volt. Ezekben a töm-

bökbén az uránhasadás termékeinek (pl. bizonyos Nd-izotópok) szokatlan feldúsulását tapasztalták. A gazdag uránlelőhely 2 milliárd éve természetes ősreaktor volt. Ekkor a  $^{235}\text{U}$  természetes aránya 3% volt, a moderátor víz (esővíz, talaajvíz) lehetett.

4. A II. világháború végére sikerült nagyobb mennyiségű  $^{235}\text{U}$ -t diffúziós dúsítással előállítani. Az új-mexikói Los Alamosban 1943 és 1945 között több magyar tudós is dolgozott: *Lax Péter, Kemény G. János, Neumann János, Teller Ede*. 1945. július 16-án Trinity Pointon robbant fel az első plutóniumbomba, kísérleti jelleggel. Augusztus 6-án Hiroshimára uránbombát dobtak (120 ezer áldozat). Az uránbomba (*Little Boy*) kb. 120 cm hosszú keskeny cső volt. Két, egyenként szubkritikus, de együtt szuperkritikus urántömbből állt, amelyeket kémiai robbanás préselt egymáshoz, így állt össze a kritikus tömeg. A két tömb felülete berilliummal, illetve rádiummal volt bevonva, amelyek érintkezéskor neutronokat szolgáltattak. A július 16-i és az augusztus 9-én Nagasakira (80 ezer áldozat) ledobott bomba plutóniumból készült. A hanfordi tenyésztőreaktorban állították elő a szükséges plutóniumot. Ebben az esetben más konstrukciót kellett használni. Belül üres (így szubkritikus) plutóniumgömböt a körülötte keltett kémiai robbanás sajtolta kritikussá. Az implózió részletes számításait az első számítógépek egyikének segítségével Neumann János végezte.

**Kérdés:** az 1990-es évek elején németországi „zöldek” olyan „zöld-szűrőt” árultak (nem olcsón), amit a fali csatlakoztatóhoz erősítve csak a nem atomerőműből származó elektromos áramot engedi át. Te vennél-e ilyen szűrőt?

### 8.3.1. Feladatok

#### ‡1. feladat. (98-1-8)

A paksi atomerőműben 4 reaktor működik. Reaktoronként a hőteljesítmény 1375 MW, villamos teljesítmény pedig 460 MW.

- (a) Becsüljük meg 1 reaktor üzemanyag-töltetét, ha tudjuk, hogy az üzemanyag kb. 3%-ban tartalmaz jól hasadó  $^{235}\text{U}$  izotópot, és az izotóp koncentrációja (az egész töltetre nézve) évente átlagosan 1,14%-kal csökken. Tegyük fel, hogy a felszabaduló energia nagyrészt az  $^{235}\text{U}$ -magok hasadásából ered, ahol egy-egy hasadás alkalmával 32 pJ energia szabadul fel. (Egy évben átlagosan 330 napot üzemel egy-egy reaktor.)
- (b) Becsüljük meg, hány fokkal melegedhet fel az erőmű hűtésére szolgáló Dunacsatorna, ha vízhozama másodpercenként 100 köbméter.
- (c) Mekkora lenne a paksi erőművel azonos hőteljesítményű hőerőmű évi üzemanyag-szükséglete, ha az 24,5 MJ/kg fűtőértékű szenet használna?
- (d) Becsüljük meg a szénerőmű által évenként kibocsátott  $\text{CO}_2$  gáz térfogatát normál állapotban. Milyen vastagon borítaná be ez a szén-dioxid gáz Magyarország területét, amely 93 033  $\text{km}^2$ ?

#### 2. feladat. (99-1-8)

Természetes dúsítatlan uránt használó reaktor szén neutronlassítóval működik. Hűtésre  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$  (nehésvíz), He (gáz),  $\text{CO}_2$  (gáz), vagy folyékony fém (pl. Na, Bi, Pb) használható. Hasonlítsuk össze az ilyen hűtésű reaktorok viselkedését túlhevüléskor. Mely hűtőközeggel (hűtőközeggel) lesz a reaktor instabil és mely hűtőközegek közömbösek a stabilitás szempontjából?

**†3. feladat.** (01-1-7)

Az 1942-ben megépült reaktor aktív zónáját Enrico Fermi homogén urán-grafit rendszernek gondolta, amelyben az urán és a grafit por alakban egyenletesen el lenne keverve. Szilárd Leó viszont inhomogén elrendezést javasolt. Ennek alapján gömböket készítettek fém uránból, amelyeket grafit téglákkal vettek körül. Minden azóta épült atomreaktor inhomogén elrendezésű. Miért?

**4. feladat.** (02-1-7)

Wigner Jenő javasolta és tervezte meg a vízhűtéses reaktorokat. Milyen előnyei és hátrányai vannak a víz alkalmazásának?

**5. feladat.** (98-2-5)

Tegyük fel, hogy a paksi atomerőmű 4 reaktor-blokkjának maradék hőjét jég olvasztására használjuk fel.

(a) Becsüljük meg, hogy a Balaton 10 cm vastag jegének megolvasztása mennyi ideig tartana. (A Balaton területét becsléssel állapítsuk meg.)

(b) Mekkora felületet kellene napelemekkel befedni olyan naperőmű építésénél, amelynek a villamos csúcsteljesítménye megegyezne a paksi erőmű állandó villamos teljesítményével?

Felhasználható adatok: a jég sűrűsége  $920 \text{ kg/m}^3$ , olvadáshője  $335 \text{ kJ/kg}$ . A Föld felszínére érkező napsugárzás teljesítménye  $600 \text{ W/m}^2$  (derült időben és merőleges beeséskor). A napelemek villamosenergia-előállítási hatásfoka 15%.

**6. feladat.** (99-2-6)

Hasonlítsd össze stabilitás (megszaladás elleni védelem) szempontjából a paksi és a csernobili atomreaktorokat.

**7. feladat.** (98-1-5)

Ma a Földön természetes úton nem indulhat meg spontán nukleáris láncreakció. A kutatók Közép-Afrikában (Gabon Köztársaságban, Oklóban) gazdag uránlelőhelyek környékén 2 milliárd évvel ezelőtti „ősreaktor” nyomaira bukkantak.

(a) Mik lehettek azok a nyomok, amelyekből valamikori szabályozott nukleáris láncreakcióra lehetett következtetni?

(b) Vajon milyen feltételek álltak fenn 2 milliárd évvel ezelőtt, amelyek lehetővé tették a feltételezett spontán szabályozott nukleáris láncreakciót? Hogyan valósulhatott meg a nukleáris láncreakció?

**8. feladat.** (99-2-4)

A természetes urán 0,7%-a  $^{235}\text{U}$ , ez hasad termikus neutronok hatására. Az  $^{238}\text{U}$  elnyeli a neutronokat. Ezért természetes vizet használva lassítóanyagként, legalább 2%-ra dúsított uránban lehet csak láncreakciót indítani. A franciák Közép-Afrikában fölfedezték, hogy az ott található uránban 0,7%-nál kevesebb  $^{235}\text{U}$  van. Ebből arra következtettek, hogy ott a geológiai múltban természetes atomreaktor működött. Hogyan lehet ez, és mikor működhetett?

**†9. feladat.** (02-2-4)

Egy, az idén megjelent tudományos közlemény szerint a Föld felszínén több elhagyott vidéken  $^{60}\text{Fe}$  izotópot találtak felszíni rétegekben. (Felezési idő 300 000 év.) A tudósok még vitatkoznak azon, hogy ennek mi lehet az eredete. Ön mire gondol? Milyen érvekkel tudja sejtését alátámasztani?

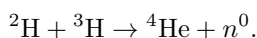


**10. feladat.** (03-2-8)

Az  $^{235}\text{U}$  hasadásából származó neutronok átlagos élettartama egy reaktorban nagyon rövid, mindössze néhány száz mikroszekundum ( $\approx 10 \cdot 10^{-6}$  s), tehát a neutrongenerációk nagyon gyorsan követik egymást, a láncreakció nagyon gyors lefolyású. Az atomreaktorokban a szabályozó rudak elektromechanikus eszközök, amelyek mozgatása másodperces időskálán mérhető. Hogyan lehetséges mégis, hogy ilyen lassú eszközökkel biztonságosan szabályozni lehet a láncreakciót?

## 8.4. Atommagfúzió, nukleáris energiatermelés

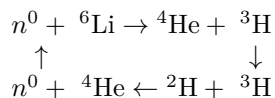
A legmélyebb energiájú magokhoz a könnyű magok felől egyesülésen (*fúzió*) át vezet az út. A folyamat energiefelzabarádással jár. Nagysebességű deuterontró tríciummagnak ütköztetve a következő folyamat zajlik le:



A folyamat során hélium és gyors neutron keletkezik. Sok neutronforrás működik a fenti módon. A folyamat gyorsítóban történő megvalósítása energiatermelésre nem alkalmas, mert csak minden sokadik deuteron okoz fúziót, és a folyamat nem zárt, nem alakul ki láncreakció.

Másik lehetőségként, magas hőmérsékleten (kb. 50 000 000 K) létrejön a fenti reakció. A folyamat hőt termel, amely tovább fokozza a reakciót. Ez a *termonukleáris láncreakció*. Hasonló jelenség zajlik le a Napban, csak ott nem deutérium és trícium, hanem protonok vesznek részt a reakcióban. Végső soron hidrogén fuzionál héliummá, a Nap önszabályozott fúziós reaktor.

Az emberiség először a szabályozatlan fúziós láncreakciót valósította meg, *hidrogénbomba* formájában. Egy plutóniumbomba biztosította a magas hőmérsékletet. Lítium és deutérium keveréke volt a fuzionáló anyag, a bomba fala  $^{238}\text{U}$ -ból készült. Megalkotása az Egyesült Államokban *Teller Ede* nevéhez fűződik. Kipróbálása 1954-ben a Bikini-szigeteken történt. A fúziós folyamat a következő volt:



A *neutronbomba* gyakorlatilag azonos az uránköpeny nélküli hidrogénbombával. Romboló hatása csekély, viszont a neutronsugárzás biológiai hatása jelentős.

A termonukleáris fúzió békés, energiatermelő célokra való alkalmazásának megvalósítása még a jövő zenéje. A Napban a magas hőmérsékletű, fuzionáló ionok együtt tartását a gravitáció végzi. Itt a Földön a szabályozott fúzió megvalósításával a legnagyobb probléma a magas hőmérsékletű, nagy sűrűségű plazma együtt tartása, tárolása. A plazma tárolásának legígéretesebb módja, hogy az ionokat mágneses térbe zárjuk, ahol azok a Lorentz-erő hatására körpályára állnak. Ilyen jellegű, orosz fejlesztésű berendezés a *Tokamak*, melyen a kísérletek manapság is folynak. Hasonlóan működik majd a Franciaországban nemzetközi összefogással megépülő *ITER*. Energiatermelő fúziós reaktor még nem üzemel, de remélhetőleg még a mi életünkben elkészülnek az első példányok. Nagy előnye lesz, hogy hatalmas energiák felszabadítására

van lehetőség, a fűtőanyag kimeríthetetlen, és tiszta: elképzelhető (bár valószínűleg nem gazdaságos) olyan fúziós reakció, amelyben nem keletkezik radioaktivitást okozó neutron.

### 8.4.1. Feladatok

#### 1. feladat. (00-1-1)

Milyen folyamatok mehetnek végbe a  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  atommagoknak termikus neutronokkal történő reakciója során? Indokold is meg a választ.

#### 2. feladat. (99-2-9)

Az atommagfúzió folyamata során az egyik reakció két deutérium atommag egyesülése héliummá. A fúzió során (elég magas hőmérséklet és nyomás esetén) a  $^2\text{H}+^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He}+n$  folyamat végbemegy. A  $^2\text{H}+^2\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$  folyamat egyáltalán nem megy végbe, a  $^2\text{H}+^2\text{H} \rightarrow ^4\text{He}+\gamma$  folyamat pedig csak roppant kis valószínűséggel. Mennyi energia szabadul fel ezekben a folyamatokban? Mi lehet az oka a bekövetkezési valószínűségekben megfigyelt különbségnek?

#### 3. feladat. (00-2-3)

A Napban (több lépésen át)  $4\cdot^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$  magfúzió termeli az energiát, ami a napfényt táplálja.

(a) Milyen lett volna a Nap sorsa, ha a  $^2\text{He}$  atommag stabilan létezne?

(b) Milyen lett volna a Nap sorsa, ha a  $^2\text{H}$  izotóp nem létezne?

#### 4. feladat. (00-2-7)

Bizonyítsuk be, hogy egy  $^2\text{H}+^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He}+n$  fúzióval működő állandó hőmérsékletű plazmában a fúziós teljesítménysűrűség a plazma sűrűségének négyzetével arányos.

#### 5. feladat. (01-2-3)

Egyes csillagokban észlelték a kalifornium ( $Z = 98$ ) transzurán elemet is, de a Földön ez az elem nem található. Hogyan lehet ez?



## 9. fejezet

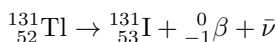
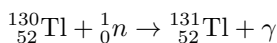
# A magfizika további alkalmazásai

### 9.1. Nukleáris diagnosztika az orvostudományban

A kémikusok nyomán 1913-ig úgy hitték, hogy a 92-féle kémiai elemnek 92-féle atom felel meg. Akkor történt, hogy *Lord Rutherford* kémiaileg azonosítani akarta az urán és a rádium radioaktív bomlástermékeit. Rutherford a feladattal az ott gyakorkodó *Hevesy Györgyöt* bízta meg. Hevesy a kémia minden fortélyát kipróbálta, de a RaD-re jellemző radioaktív sugárzás mindig az ólommal együtt maradt. Így született az a felismerés, hogy egy elem atomjai különbözőek lehetnek. Munka közben Hevesy rájött, hogy a sugárzó, RaD-vel jelölt elem – amit az ólomtól el kellett különítenie – az ólom radioaktív izotópja. Így született meg a *radioaktív nyomjelzés* technikája, amiért 1943-ban kémiai Nobel-díjat kapott (Hevesyt korábban többször jelölték sikertelenül kémiai Nobel-díjra a hafnium felfedezéséért). Érdekes, hogy csak ez után, 1945-ben lett az MTA tagja. Az általa kidolgozott módszert a sugárterápiában és a sugárdiagnosztikában a mai napig használják. Eredményéért az Egyesült Államokban az *Atom a békéért* díjjal is kitüntették. Hamvai 2001. április 19-én kerültek magyar földbe.

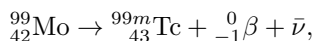
Gondot jelentett, hogy az élő szervezet kevés nehéz elemet tartalmaz, aminek természetes radioaktív izotópja lenne. 1935-ben ezért dolgozta ki Hevesy a *neutron-aktiválás* módszerét: stabil magba neutront löve a keletkező mag radioaktív lesz.

Kezdetben a pajzsmirigy vizsgálatára  $^{131}_{53}\text{I}$ -izotópot használtak. Ennek előállítására:

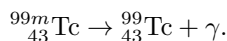


Ezt a jódíotópot ma már nem használják: egyrészt a béta-sugárzás jelentős szervezeten belüli roncsolása miatt, másrészt a 8 napos felezési idő manapság már soknak számít. Ma már inkább olyan radiofarmakonokat használnak, amik gamma-bomlanak,

s a felezési idejük lehetőleg kicsi. Az utóbbi években elterjedt a *technécium* (Tc) széleskörű alkalmazása. A kórházba a 67 órás felezési idejű,  $\beta^-$ -bomló  $^{99}_{42}\text{Mo}$  izotóp érkezik. Ez alakul át a technécium egy metastabil (izomér) állapotába:



majd az így nyert izotóp 6 órás felezési idővel  $\gamma$ -bomlik:



A rövid felezési idő előnye, hogy azonos aktivitás elérésére kevesebb sugárzó anyag kell, s az is hamar elbomlik a szervezetben. A nagy áthatolóképességű  $\gamma$ -sugárzás előnye, hogy szervezeten belül kisebb ionizációt okoz, mint a másik két sugárzásforma. A felezési idő kicsisége miatt ezeket az izotópokat nem lehet nagy távolságra szállítani, ezért fizikusnak és orvosnak együtt kell dolgoznia.

A következő izotópok használata terjedt el:

Csont:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$ ,  $^{45}_{20}\text{Ca}$

Pajzsmirigy:  $^{133}_{53}\text{I}$ ,  $^{99m}_{43}\text{Tc}$ , ( $^{131}_{53}\text{I}$ )

Máj:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$

Szív, keringés:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$ ,  $^{201}_{81}\text{Tl}$

Tüdő:  $^{133}_{54}\text{Xe}$ ,  $^{99m}_{43}\text{Tc}$

Vese, epe:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$

Agy:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$ ,  $^{133}_{53}\text{I}$ , ( $^{15}_8\text{O}$ ,  $^{18}_9\text{F}$ )

Daganat:  $^{133}_{53}\text{I}$ ,  $^{201}_{81}\text{Tl}$ ,  $^{18}_9\text{F}$ ,  $^{67}_{31}\text{Ga}$ ,  $^{111}_{49}\text{In}$

Vér:  $^{99m}_{43}\text{Tc}$

Vörösvértestek:  $^{52}_{24}\text{Cr}$

Víz:  $^3_1\text{H}$

A nyomjelző izotópok szervezetbe juttatásának hordozóanyagaként többnyire szerves vegyületeket használnak (például a  $^{99m}_{43}\text{Tc}$ -izotóp esetében a vizsgált szervtől függetlenül különféle szerves komplexeket használnak).

Az információszerzés a sugárzásból *gammakamerával* történik: a kamera alsó része jó elnyelő ólomból készül, amiben sűrűn elhelyezett „furatok” helyezkednek el. Ennek az a szerepe, hogy a  $\gamma$ -fotonok kiindulási helyét meg lehessen határozni. Eztán a foton méhsejtszerűen elhelyezett NaI-kristályba érkezik, ahol szcintillációt okoz. Ezt a gyenge jelet fotomultipliercsővel (vagy más fotoelektronikus eszközzel) lehet megnövelni. Ezután el lehet készíteni a szcintogramot. Ezt régen elektromos írógép készítette sűrűbben vagy ritkábban írt „X”-ek használatával, ma már természetesen számítógépet használnak. A beteg szervéről készült felvételt összehasonlítják az egészséges szervről készült képpel. A pajzsmirigy vizsgálatakor, ha az egyik oldali mirigyből több jel érkezik, mint a másiktól, akkor az adott mirigy aktívabbá vált, kezelésre van szükség. A tüdő vizsgálatakor Xe-t lélegeztetnek be a beteggel, így készítenek egy képet, majd egy másikat is, amikor Tc-izotópot juttatnak a vérbe. Ha a képek megegyeznek, akkor nincs probléma, embólia esetén viszont a vér nem jut el mindenhol a tüdőben, a két kép eltérő lesz. Ha az agy vizsgálatakor „fehér foltok” jelentkeznek, a vér nem jut el az agy minden területére, ez az öregkori elbutulás jele.

Az 1980-as években Teller Ede Reagan elnök tanácsadója volt. Ő már ekkor is idős

volt. Egy talliumos szívvizsgálat után a Fehér Házba akart menni megbeszélésre, de a kapuban a biztonsági detektorok jelezték az átlagnál magasabb sugárzását.

### 9.1.1. Feladatok

#### 1. feladat. (98-1-9)

Pajzsmirigy vizsgálatához  $8 \cdot 10^{-11}$  gramm radioaktív izotópot tartalmazó készítményt használnak, amelynek 50%-a a pajzsmirigybe épül be, és ott is marad. A többi 24 óra alatt kiürül a szervezetből. Az izotóp felezési ideje 8 nap (ez azt jelenti, hogy minden 1 millió jódatommag közül másodpercenként átlagosan 1 bomlik el).

- Mekkora a készítmény felhasználás előtti aktivitása?
- Mennyi lesz a pajzsmirigyben a jód aktivitása 4 nap elteltével?
- Mennyi idő múlva lesz a pajzsmirigyben az aktivitás értéke biztosan kisebb a pajzsmirigyben felhalmozódó jód kezdeti aktivitásának 1%-ánál?
- Becsüljük meg, hogy maximálisan hány mSv egésztest-sugárterhelést (egyenérték-dózist) kaphat egy 60 kg tömegű vizsgált személy a pajzsmirigybe beépült radioaktív jód sugárzásától, ha elhanyagoljuk a  $^{131}_{53}\text{I}$  gamma-sugárzását, és minden bomláshoz egy béta-részecskét rendelünk, melynek átlagos energiája 0,1 pJ. (A béta-sugárzás minőségi tényezője 1.)

#### 2. feladat. (00-1-2)

A környezet- és egészségvédelmi előírások szabályozzák, hogy mikor lehet radioaktív hulladékot a csatornarendszerbe kiönteni. Például  $^{32}\text{P}$  izotópból csak olyan önthető ki, amelynek aktivitáskoncentrációja legfeljebb  $20 \frac{\text{MBq}}{\text{m}^3}$ . Mennyi ideig kell tárolni a literenként  $8 \cdot 10^7$  Bq aktivitású hulladékot a kiöntés előtt? A  $^{32}\text{P}$  felezési ideje 14,3 nap.

## 9.2. Sugárvédelem

### 9.2.1. Kockázatok kvantitatív mérése

Kockázatok kísérik mindennapi életünket. Léteznek olyan veszélyek, amelyek nem hordoznak számottevő kockázatot – például az, hogy a házunkra zuhan egy repülőgép –, más veszélyek sokkal súlyosabbak – közlekedési baleset, dohányzás, ... A kockázatokot ilyen extrém különbségek esetén össze tudjuk hasonlítani, de általában ez nem ilyen könnyű. A *kockázat* fogalmát matematikailag is értelmezzük:

$$R = W \cdot K,$$

ahol  $W$  az esemény bekövetkezésének valószínűsége,  $K$  pedig a következmény súlyossága. (Teljes biztosság esetén  $W = 1$ , halálesetben  $K = 1$ .) A kockázatot szokásosan haláleset bekövetkezésének valószínűségeként definiáljuk. Ez egy másik értelmezést is lehetővé tesz: ha  $N$  fős populációt valamely  $R$  kockázatú eseménynek teszünk ki, akkor közülük e hatás miatt várhatóan  $NR$  számú hal meg. Ezt a szorzatot *kollektív kockázat*nak nevezzük.

Szerencsére 1 kockázatú esemény kevés van – halandó voltunkon kívül mindent túl tudunk élni bizonyos valószínűséggel. A kockázatokról való beszélés leegyszerűsít-

tése érdekében vezessük be a *mikrorizikó* ( $\mu r$ ) fogalmát: 1 mikrorizikós kockázatnál  $R = 10^{-6}$ , azaz egy ember hal meg egymillió, a kockázatnak kitett közül. Ekkora kockázata van például egy cigaretta elszívásának, 80 km autóbusszos, 65 km autós utazásnak és (a radon és a földrengésveszély miatt) egy heti házban alvásnak. Ezeket a kockázatokat teljesen elfogadhatónak tartjuk, ezek „benne vannak a pakliban”. Egy Kaliforniában bevezetett, és azóta de facto az egész világon elfogadott törvény kimondja, hogy senkit sem lehet előzetes tájékoztatás nélkül kitenni 10 mikrorizikónál nagyobb kockázatnak. Ezért kell például tájékoztató feliratot nyomtatni a dohánytermékekre. Ez még mindig kicsinek tűnő kockázat, de ha például hazánk 10 milliós lakosságát ekkora kockázatnak tennénk ki, csak ettől várhatóan száz ember halna meg. Ez a növekedés remek módszert kínál valamitől való félelem felkeltésére. Azt is beláthatjuk, hogy 10 mikrorizikónál kisebb kockázatot nem is lehet megmérni.

### 9.2.2. Ionizáló sugárzások

Már az ultraibolya sugárzás is képes arra, hogy a molekulákat gerjessze és átrendezze. Ez is tönkretelhet egy sejtet és minden utódát, így okozhat bőrrákot és szemhályogot.

Ha a sejtbe olyan részecske érkezik, amely *igen nagy energiájú* (0,01 pJ–1 pJ), az már *bármely molekulát képes ionizálni*. Ez súlyos biológiai veszély. A sejtben elhelyezkedő ionok durván megzavarják a sejt enzimek által finoman irányított biokémiai rendszerét. Ha a bejövő részecske energiája nagy, akkor egy részecske közvetve vagy közvetlenül több iont is kelthet, így az ionizáció nem a részecskeszámmal, hanem a *részecskék összes energiájával arányos*. Különböző részecskék biológiai hatása azonban más és más, azonos energia esetén is.

**A röntgen- és  $\gamma$ -fotonokban** elektromos mező rezeg, így elektromosan töltött részecskéket ragadnak meg, elsősorban elektronokat. Ha a foton energiája meghaladja a molekulák ionizációs energiáját, akkor a foton elektron–pozitív ion párt kelt. Ha az ionizációs energiánál sokkal nagyobb a fotonenergia, akkor az ütközésnél az elektront jó közelítéssel szabadnak tekinthetjük. Elektron azonban nem veheti fel a foton teljes energiáját. *Szabad elektron fotont nehezen nyel el, az elektromágneses sugárzás nagy áthatólképességű*. Az ilyen fotonokat *kemény fotonnak* nevezzük. Kemény foton csak akkor nyelődhet el, ha a lendület egy részét az atommag nyeli el. Ezt az elektront adja át az atommagnak a Coulomb-erőn keresztül, ami arányos az atom rendszámával. *Kemény fotonok elnyelésére emiatt magas rendszámú elemek az alkalmasak*. A magasabb rendszámú csont ( $\text{CaPO}_3$ ,  $Z = 20, 15, 8$ ) ezért jobban elnyeli a röntgensugárzást, mint az alacsonyabb rendszámú (H, C, N, O) lágy szövetek; az orvos is ezért visel ólomkötényt (82). Nagyon nagy (közel pJ) energiájú fotonok számára az anyag egyre átlátszóbb, feltartóztatásuk már csak hatalmas befektetés árán lehetséges. Az ilyen fotonok az elektronokkal *Compton-szórás* útján lépnek kapcsolatba; továbbá, ha a foton energiája meghaladja a  $2m_e c^2 = 0,16$  pJ értéket, a foton elektron–pozitron párrá alakul: ez a *párkeltés*.

**Az elektron** elektromos erővel kiszakíthat egy másik elektront az atomból. Ez főleg könnyű elemek esetén veszélyes, növekvő rendszámmal az elektron egyre inkább megéri az atommagok vonzását, mint egy másik elektront: a részecske lefékeződik. A lelassuló elektron nem tud lendületet átadni az atommagnak: számára az mereven rögzített fal. A leadott energiát *fékezési sugárzás* keretében egy  $\gamma$ -foton viszi el. Az elektron igazán a fékezési  $\gamma$ -fotonnal ionizál nehezebb elemekben: a légkör felsőbb rétegeiben az óriási energiájú elektronok *légizáporokat* váltanak ki, ezek több km hosszúak, több m szélesek.

**A proton** szintén elektromos erővel ionizál. De mivel a proton sokkal nehezebb az elektronnál, sokkal lassabban mozog, így több ideje van ionizálni, hamarabb elnyelődik, viszont gyakrabban ionizál. Mivel a proton lassabb, és nagyobb tömegű, sokkal kisebb gyorsulással fékeződik, így fékezési sugárzása gyenge.

**Az  $\alpha$ -részecske** négyszer nehezebb a protonnál, és szintén töltött, így az előbb elmondottak miatt vékony fólia, néhány cm levegő, vagy a bőrham is felfogja. *A kívülről érkező  $\alpha$ -részecske tehát nem veszélyes.* Ha viszont a radioaktív sugárforrás a szervezetbe kerül, az alfa-részecske az előbb elmondottak miatt sokkal veszélyesebb, mint a többi sugárzástípus – ugyanez áll a protonra is –, hiszen a részecske teljes energiája néhány sejten nyelődik el, így koncentrált veszélyt hordoz. Ezek hatványozottan igazak a nagyobb tömegű és töltésű egyéb atommagokra is, például a maghasadás termékeire. *Atommagok kívülről nem veszélyesek, belülről viszont sokkal veszélyesebbek a többi sugárzástípusnál.*

**A neutron** akadály nélkül átmege az elektronhéjon, őt csak az atommag érdekli. Az atommag viszont nagyon kicsi, így a neutron nagyon átütőképes, több méteres falon is áthatol. Lefékezni ütközések útján lehet, amire könnyű atommagok alkalmasak, például a hidrogén (víz, paraffin, kristályvíztartalmú kőzetek, könnyűbeton, . . .). Vízből a neutron protont is kilökhethet, így ionizáló proton keletkezik, ami miatt *a neutron az emberre igen veszélyes.*

Láthatjuk, hogy azonos elnyelt dózis esetén is különböző az egyes sugárzások élet-tani hatása.

### 9.2.3. Sugárbiológia

A nagyenergiájú (ionizációs energiánál nagyobb energiájú) részecskék azzal keltenek élettani hatást, hogy ionizációjuk révén megzavarják a sejt biokémiai rendszerét. Az ionok száma lényegében arányos az összes elnyelt energiával, így az ionsűrűséggel arányos élettani hatás az egységnyi tömegű élő anyag elnyelte ionizáló energiával arányos. A radioaktív hatás jellemzésére tehát az *elnyelt dózist* használjuk, amely az egységnyi tömeg által elnyelt ionizációs energiát jelenti. SI mértékegysége a  $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$ , amelynek neve a *gray (Gy)*. Ekkora dózis szerencsére ritkán fordul elő, törtrészét a *milligrayt (mGy)*, vagy – hagyomány-okokból – a centigrayt (cGy) használjuk.

A fotonok és a  $\beta$ -sugárzás gyors elektronjai ritkán ionizálnak, és egy sejten ritkán keletkezik több ion. Ezt az ionizációt a sejt hibajavító rendszere még orvosolja, kisebb a biológiai veszély. Az  $\alpha$ -sugárzás esetén az energia rövid úton elnyelődik, ami néhány sejt koncentrált, maradandó károsodást okozó ionizációját jelenti. A sugárzások maradandó károsodást okozó képességét a *sugárzási tényezővel* ( $w_R$ ) jellemezzük:



$w_R = 1$	röntgen-, $\gamma$ -, $\beta$ -sugárzás
$w_R = 2$	lassú neutronok
$w_R = 10$	gyors neutronok
$w_R = 20$	$\alpha$ -részecskék, protonok, maghasadási termékek

A biológiai hatást jellemző *egyenértékdózis* definíciója:  $H = w_R \cdot D$ ; jele  $H$ , mértékegysége  $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$ , ennek elnevezése *sievert* ( $\text{Sv}$ ). Akárcsak a gray esetében, elterjedten itt is törtrészeket alkalmazunk: *millisievert* ( $\text{mSv}$ ), és a nem-SI mértékegységekről való áttérés miatt *centisievert* ( $\text{cSv}$ ). Az átlagembert érő egyenértékdózis millisievert nagyságrendű. A *kollektív dózis* az  $N$  lélekszámú populációt érő összes egyenértékdózis értéke:  $N \cdot \bar{H}$ , egysége a  $\text{Sv} \cdot \text{fő}$ . (Régen alkalmazták a  $\text{rad} = 0,01 \text{ Gy}$  és a  $\text{rem} = 0,01 \text{ Sv}$  egységeket. Az elnyelt dózis és az egyenértékdózis helyett is pongyolán gyakran a „dózis” szót használjuk.)

Az ionizáló sugárzás által keltett ionok durván megzavarják az emberi szervezet finoman szabályozott biokémiai rendszerét, így a radioaktivitás feltétlenül veszélyes az emberre. Ismert, hogy 10 Sv egyszeri egésztestdózis halálos, 5 Sv pedig 50% valószínűséggel halálos (a legnagyobb egyszeri dózist Pjotr Palemarcsuk technikus élte túl Csernobilban: 8 Sv-et). 0,2 Sv-et meghaladó dózis akut tüneteket okoz (szomatikus hatás), de ekkora dózist kevés ember él meg (Hiroshimában és Nagasakiban a bomba robbanásának 1,5 km-es körzetében, Csernobilban az erőműben). Az emberek nagy részét kicsi dózisok érik, folyamatosan, ezek sztochasztikus hatása viszont csak évek, évtizedek múltán jelentkezhethet, rákot, leukémiát okozva.

A nagy dózisokat elszennvedett emberek sorsából (Hiroshima, Nagasaki, Csernobil) a következő közelítő arányosságot határozták meg (nagy dózisokra):

$$R = \frac{50 \mu\text{r}}{\text{mSv}} H.$$

A *Nemzetközi Sugárvédelmi Bizottság* (ICRP) ezzel a becsléssel számol (igazán nagy dózisok esetén a szervezet korlátozott regenerálódása miatt ennek kétszeresével kell számolni). A sugárzás veszélyei az azt elszennvedő emberre korlátozódnak, genetikai mutációk az utódban nem figyelhetőek meg (áll ez a kémiai mérgezésekre is), az emberi szervezet védelmi mechanizmusainak köszönhetően.

Az embert érő  $\text{mSv}$  nagyságrendű dózisok kockázata nem számottevő, viszont akár egyetlen gammafoton is okozhat halált, akárcsak egyetlen mérgező molekula vagy egyetlen vírus. A nemzetközi szabvány ezért így fogalmaz: „*a lakossági sugárterhelés legyen Alacsony, Legalább Amennyire Racionálisan Alacsonyítható.*” (ALARA elv: as low as reasonably achievable.) A kockázatokat azonban nem küszöbölhetjük ki. A városok közlekedése, az erőművek (nem csak az atomerőművek), a talaj (radon), sőt saját és embertársaink testének radioaktivitása ellen nem védekezhetünk. Az elv megvalósítása itt azt jelenti, hogy az ilyen sugárterhelést bölcsen, a kockázatok lehetséges csökkentésével kezeljük.

### 9.2.4. Feladatok

#### 1. feladat. (98-1-3)

Két radioaktív anyag – A és B – aktivitása, felezési ideje és az anyagokból távozó részecskék energiája azonos. Az A anyag  $\alpha$ -, a B anyag pedig  $\beta$ -sugárzó.

(a) Tőlünk azonos távolságokban lévő A és B anyagok közül melyik veszélyesebb és miért?

(b) Ha az A és B sugárzó anyag a szervezetünkbe kerül – és ott is marad –, akkor melyik anyag és miért okozhat nagyobb egészségi károsodást?

#### 2. feladat. (00-1-3)

Biológiailag az azonos energiájú és intenzitású neutron- vagy  $\alpha$ -sugárzás a veszélyesebb? Indokold meg a választ.

#### 3. feladat. (00-1-4)

Az  $5 \text{ cm}^3$  normál állapotú levegőt tartalmazó töltőtoll-doziméter kapacitása legyen  $1 \text{ pF}$ , és töltsük fel  $1000 \text{ V}$ -ra. Mennyi az elnyelt dózis, ha a besugárzás után a feszültsége  $900 \text{ V}$ -ra csökkent? *Adatok:* a levegő átlagos ionizációs energiája  $6,88 \text{ aJ}$ , sűrűségét vegyük  $1,3 \text{ kg/m}^3$ -nek.

#### 4. feladat. (99-2-3)

Milyen anyagból készült és milyen vastag fallal védekezni az alfa-, a béta-, a gamma- és a neutronsugárzás ellen? Mindegyik sugárzás külön-külön és tisztán értendő. Indokold meg válaszodat.

#### 5. feladat. (00-2-4)

Környezetvédelmi–környezettisztasági szempontból hasonlítsd össze az (azonos teljesítményű) szénerőművet, gázerőművet, atomerőművet.

#### 6. feladat. (02-2-2)

A szén-, olaj- és gázerőművek által termelt  $\text{CO}_2$  elnyeli a meleg talaj hőszugárzását, üvegházszerű fölmelegedést okoz.

(a) Miért pusztul el éhen mégis több legelő vadállat telente Mongóliában és Szibériában a vastagabb és tovább tartó hótakaró miatt?

(b) Miért van szárazság és éhínség Afrikában, miért vannak árvizek Magyarországon, tornádók Amerikában az utóbbi években?

#### 7. feladat. (02-2-8)

Egy zárt kartondoboz műanyaghab, levegő és sárgaréz szegecsek rétegeit tartalmazza. A függőleges elhelyezkedésű dobozra béta részecskék párhuzamos nyalábja érkezik a rétegekre merőleges irányból (vízszintesen). A doboz túlfelére helyezett Geiger-Müller detektor méri a dobozon áthaladó részecskék számát. A doboz fokozatosan emelkedik. A beütésszámot a doboz aljától számított különböző magasságokban mérve a következőket kapták:

Beütésszám/perc	magasság (mm)
1020	50
1054	45
1018	40
3026	35
3008	30
42	25
23	20
35	15
1086	10
1040	5

- (a) Alkalmas grafikon megszerkesztésével határozza meg a műanyaghab, a rézszegecs-réteg és a levegőréteg pontos helyét.
- (b) Hogyan lehetne ezt az eljárást ipari célokra felhasználni?

### 8. feladat. (03-2-1)

A Paksi Atomerőmű működése óta 2002. dec. 31-ig 240231 GWh energiát termelt. Mennyi oxigént fogyasztottak volna a szénerőművek, ha ezt az energiát szénerőművekkel állítottuk volna elő? (Az energiaátalakítás átlagos hatásfokát vegyük 30%-nak.)

## 9.3. Radonprobléma

A Föld belsejét  $^{40}\text{K}$ , tórium és urán bomlása fűti. Ezek tartják melegen bolygónkat, tartják mozgásban a kőzetlemezeket, és ezek felelősek a *geotermikus energia* meglétéért. A  $^{40}\text{K}$  bomlásterméke a  $^{40}\text{Ar}$  nemesgáz, ez teszi ki légkörünk 1 százalékát. A tórium bomlássorának egyik eleme a  $^{220}\text{Rn}$ , a toron, ami 1 perc felezési idővel tovább bomlik. Az uráncsalád bomlássorában szerepel a  $^{222}\text{Rn}$ , a radon, ami szintén radioaktív, 3,8 napos felezési idővel.

A nemesgázok kitudfundálnak a talajból. A stabil argon teljes egészében kijut, a toron rövid felezési ideje miatt csak kis részben kerül ki, radonból lényegesen több. Néhány hozzávetőleges érték a radonkoncentrációk közül ( $\frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  egységben):

külső levegő	8
toron világátlag	3
trópusi lakások	20
huzatos szoba	30
lakások világátlagban	40
felére csökkentett légáramlás	80
szellőzetlen szoba	100
magyar falusi földszintes lakás	130
lakások 2%-ában több, mint	250
0,02%-ában pedig	800
pince	250
radonos lakás	1000
radonos pince	10 000
radonos bánya	30 000

A Lukács-fürdőt tápláló barlang egyik kürtőjében  $80\,000 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  radonkoncentrációt is mértek. Hazánkban a lakások átlagos radonkoncentrációja  $55 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$ . A radont belélegzés után – akárcsak a nitrogént – kilélegezzük. Bomlástermékei azonban fémionok, amelyek kitapadnak a porszemek, falak felületén, valamint a tüdő és a légső falán is. Ezek nagy része  $\alpha$ -bomló, amely súlyosan roncsolja a tüdőfalat, így tüdőrákot okoz. Ezt a hatást bányászoknál már a XV. században is felismerték, emiatt ma már intenzíven szellőztetik a bányákat.

A radon-leányok a poros, dohányfüstös helyiségben kitapadnak a porszemeken, amelyeket belélegzünk; pormentes, tiszta levegőjű helyiségben a radonleányok a falra tapadnak, keveset lélegzünk be. A radon aktivitáskoncentrációja *elméletileg* meg egyezne a leányelemekével, ha a helyiség teljesen tiszta, zárt és végtelen nagy lenne (nem tapadnának ki radonleányok). A ténylegesen mért és az elméletileg számított radonleány-koncentrációjának  $F$  hányadosa a helyiség szellőzőtségre jellemző. (Teljesen szellőztetlen szobában beállhat az  $F \approx 1$  egyensúlyi állapot. Nemzetközi ajánlás az  $F = \frac{1}{2}$  érték, kevéssé szigetelt falusi házakban  $F \approx \frac{1}{6}$  érték is elképzelhető.) Mérőeszközeink a radon koncentrációját mérik, ránk azonban az  $F$ -fel megszorított leányelem-koncentráció van befolyással.

A lakások radonkoncentrációja folyamatosan változik. Éjjel (csukott ablak mellett) összegyűlik a radon, reggel, a szellőztetés miatt lecsökken a szintje. Nappal a koncentráció közel állandó, de alacsony értéken marad. Szeles időben a huzat miatt lecsökken a radonkoncentráció. Télen kevesebbet szellőztetünk, a fűtés hatására cirkuláció indul be a szobában, ami meggyorsítja a talajdiffúziót, emiatt a téli radonkoncentráció sokszorosa lehet a nyárinak.

Ezen változások miatt a radonszint mérése hosszú ideig tart. A mérőműszert hálószobában, párnamagasságban kell elhelyezni, és sokáig ott tartani. A lakó szempontjából a *radonkoncentráció éves átlaga érdekes*. Ennek mérése hosszú ideig tart, sok odafigyelést és türelmet igényel.

A radonkoncentrációból azonban nem következtethetünk egyértelműen a sugárterhelésre. Egyrészt függ az életmódunktól, a levegő porosságától, a helyiség nagyságától, és számos egyéb tényezőtől. Többféle átszámítást használnak: lakásban  $20\text{--}60 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  radonkoncentráció okoz évi  $1 \text{ mSv}$  dózist. Ezek középértékét elfogadhatjuk:  $40 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  *aktivitáskoncentráció jelent  $1 \frac{\text{mSv}}{\text{év}}$  dózist*. Ezért helyiségek radonosságának jellemzésére elterjedtebben használjuk az aktivitáskoncentrációt, mint a dózisértéket.

A radonproblémára Svédországban figyeltek fel. A svéd tél hosszú és az ország talajzatát képező gránit dús uránban. Gránitsziklára épült földszintes házakban olajjal fűtöttek. A 70-es évek olajválsága után intenzív lakásszigetelési kampány indult. A kampány eredményeképpen a svédek dózisa a négyszeresére szökkent fel. Hamar rájöttek a dózis forrására, így a 70-es évek végén újabb kampány indult, most a lakások radonmentesítése miatt. Radonmentesítés a fűtött szobák szívóhatásának biztosításával (padló alatti elszívócsövekkel), a radont hozó légáramlások eltérítésével érhető el.

Az Európai Unió a radonmentesítés tekintetében új lakásokra  $200 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$ , régi lakásokra  $400 \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$  szintet ajánl, ez – szerencsére – felülírta a korábbi, intézkedést nem előíró magyar szabályt. A magyar lakások radonszintmérése még gyerekcipőben jár,

így is kiderült, hogy több ezer  $\frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}$ -es aktivitású lakások is vannak hazánkban. Lelkes fizikatanárok és tanítványaik eredményeképpen ma már sok lakásnak ismert a radonkoncentrációja. Ezt a tanári eredményt ismerte el 1995-ben a Magyar Nukleáris Társaság által *Tóth Eszternek* adott Szilárd Leó-díj.

A radon jól oldódik vízben, számos termál-, és gyógyvíz sok radont tartalmaz (a vízvezetéki víz átlagban  $2-3 \frac{\text{Bq}}{\text{l}}$ , egyes gyógyvizek több ezer  $\frac{\text{Bq}}{\text{l}}$  aktivitásúak).

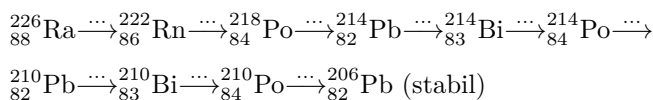
### 9.3.1. Feladatok

#### 1. feladat. (98-1-2)

Az alábbi bomlási soron részletesen tanulmányozhatjuk a radioaktív radongáz keletkezését és elbomlását.

(a) Tüntessük fel a nyilak fölötti pontozott helyeken, hogy az egyes magátalakulások milyen radioaktív sugárzással járnak.

(b) A radonos lakásokban – megfelelő műszerekkel – milyen fajtájú sugárzásokat mérhetünk? Vajon a szoba pormentes levegőjében az  $\alpha$ -sugárzó izotópok vagy a  $\beta$ -sugárzó izotópok aktivitáskoncentrációja  $\left(\frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}\right)$  a nagyobb és miért?



(c) Mikor és miért nagyobb egy radonos helyiségben az ott élők egészségi kockázata: ha poros vagy tiszta a helyiség levegője? *(Vegyük figyelembe, hogy a radon nemesgáz és nehezen kötődik más anyagokhoz. A leányelemei viszont fémek, amelyek szívesen tapadnak más anyagokhoz, így a levegőben lévő porszemekhez, vagy a helyiség falához.)*

#### 2. feladat. (99-1-9)

Télen egy földszintes ház hideg vagy fűtött szobájában várható magasabb radonkoncentráció? Indokoljuk meg a választ.

#### 3. feladat. (01-1-4)

Mit gondol, mely korban élhettek az emberek magasabb radonkoncentrációban: a jégkorszakban, az ókorban, száz éve vagy napjainkban? Kérjük, indokolja választását.

#### 4. feladat. (01-1-8)

Egy diák nyomdetektorral megméri hálószobájában a radon aktivitás koncentrációját, és  $100 \text{ Bq/m}^3$  értéket kap. Mit tegyen?

#### 5. feladat. (02-1-2)

Mit gondol, az emberek miért kapnak nagyobb sugárdózist télen egy zárt földszinti szobában akkor, ha dohányfüstös a levegő?

#### 6. feladat. (03-1-3)

Uránbányászoknál tapasztalták a tüdőrák gyakoribbá válását, ha nem megfelelő a bánya szellőztetése. Hogyan okozhat a radon tüdőrákot, hiszen nemesgáz és rövid éleztartása, tehát belelegezzük, majd kilélegezzük, mint a nitrogént?

#### 7. feladat. (99-2-5)

Egy szoba levegőjének radon-aktivitáskoncentrációja  $100 \text{ Bq/m}^3$ . Egy ebben a szobában lévő ember 5 s-onként vesz lélegzetet, s egy lélegzetvételnél kb. 3 liter levegőt

szív be a tüdejébe. Hány radon-atommag bomlik el a tüdejében egy óra alatt?

**8. feladat.** (01-2-9)

A földkéreg átlagos urántartalma 4 g/tonna. A kőszén átlagos urántartalma 120 g/tonna. (Néha a 800 g/tonna értéket is eléri.) Évente  $0,4 \cdot 10^{12}$  tonna kőszént égetnek el. Ebből mennyi a bioszférába kerülő termékek (salak, hamu, füst) aktivitása? Becsüld meg, vajon a földkéreg uránjának Rn-emissziója (a felső 1-2 m-ből) vagy a szénégetésből bioszférába jutó termékek aktivitása lehet nagyobb. A kohósalakból épült házak fala bocsát-e ki radont? (A természetes uránban mért  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  izotóparány 0,7%, 99,3%. A  $^{235}\text{U}$  felezési ideje 0,7 milliárd év, a  $^{238}\text{U}$  felezési ideje 4,5 milliárd év.)

**†9. feladat.** (02-2-1)

A radon belégzése egyes helyeken a tapasztalat szerint főleg tüdőrákot, más helyeken főleg emlő- és hastáji rákot okoz. Mi lehet a különbség oka?

## 9.4. Gyorsítók, izotópdúsítók

A következő fejezet két eszközt mutat be.

### 9.4.1. Ciklotron

Ismert, hogy  $q$  töltésű,  $v$  sebességű részecskére a sebesség irányára merőleges  $B$  indukciójú mágneses térben  $qvB$  nagyságú mágneses Lorentz-erő hat, amely merőleges mind a sebesség, mind az indukció irányára. Tehát mágneses térben a részecskére állandó, a sebesség irányára merőleges erő hat. Ez az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele.

A Lorentz-erő fedezi a körpályán tartáshoz szükséges  $m\frac{v^2}{r}$  centripetális erőt. A két erő egyenlőségéből:

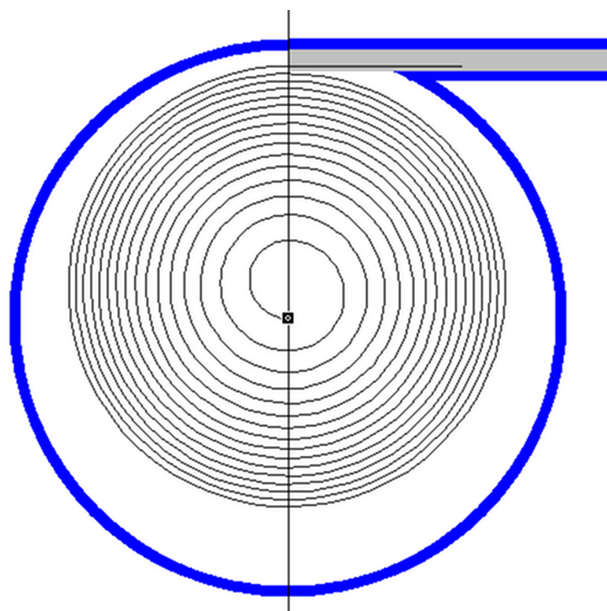
$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m},$$

ez a körpályán mozgó részecske szögsebessége, amiből a pályasugár  $r = \frac{mv}{qB}$  szerint adódik. Mágneses térrel tehát a mozgó töltött részecskék adott térrészbe zárhatók. Ez a ciklotron működési elve.

A ciklotront jellemzően részecskegyorsítóként használjuk. A ciklotron tengelyében elhelyezünk egy elektromos mezőt, amelyen áthaladva a részecske elektromos munka révén energiára tesz szert. A ciklotronban mozgó részecske emiatt spirális pályán mozog. Ha az elektromos mező körfrekvenciája  $\omega = \frac{qB}{m}$ , a részecske mindig akkor érkezik a mezőbe, amikor az éppen gyorsítja (rezonancia-feltétel), ebből a frekvencia kifejezhető. Egy ilyen ciklotront láthatunk a 9.1. ábrán.

A ciklotronnal izotópokat is elválaszthatunk. Azonos energiájú részecskék eltérő tömegük miatt eltérő sugarú pályán mozognak, amivel az izotópok elválaszthatók. Hasonló elven működik a tömegspektroszkóp is.



9.1. ábra. Ciklotron

### 9.4.2. Diffúziós izotópszétválasztó

Az eszköz a diffúzió jelenségén alapul. A gáz halmazállapotú anyag részecskéinek energiája az ekvipartíció-tétel miatt azonos, a könnyebb molekuláknak ezért nagyobb a sebessége, mint a nehezebbeknek. A diffúzió sebessége arányos a részecskék sebességével, így a könnyebb molekulák gyorsabban diffundálnak át egy falon.

A diffúziós izotópszétválasztó egy porózus fallal (pl. kerámiafallal) kettéválasztott tartály, amelybe a gáz különböző izotópú változatait engedjük. A könnyebb izotópokat tartalmazó gázok a fentiek miatt valamivel gyorsabban diffundálnak át a tartály másik felébe.

Mind a két módszert a II. világháború alatt használták arra az Egyesült Államokban, hogy a természetes uránt  $^{235}\text{U}$ -ban dúsítsák. Az uránnak létezik egy vegyülete, az *urán-hexafluorid* (fizikus becenevén hex, ami németül boszorkányt jelent – a vegyület valóban igen veszélyes, ugyanis mérgező, bomlékony és rendkívül korrozív). A molekulákat a fenti módokon el lehet választani. A tömegspektroszkopikus módszer szinte tökéletesen szétválasztja a kétféle izotópot, mégsem volt hatékony, mivel a kor ionforrásai nem tudtak számottevő mennyiségű iont előállítani. A diffúziós dúsító sokkal kevésbé hatékony: 1000 lépcsővel 3% dúsulást lehet elérni. A diffúziós izotópdúsító tehát óriási létesítmény, mégis ezzel a módszerrel sikerült annyi viszonylag tiszta  $^{235}\text{U}$ -t előállítani, ami elegendő volt egy bomba elkészítésére. Ma már fejlettebb módszerrel, ultracentrifugával dúsítják az uránt a nyomottvizes reaktorokba.

Más módszerek is léteznek részecskék izotópelválasztására, ezeket azonban most nem ismertetjük.

### 9.4.3. Feladatok

#### 1. feladat. (00-1-7)

Háromszorosan ionizált  $\text{UF}_6$  molekulákat gyorsítunk 5 kV feszültséggel, majd egy piciny nyíláson 1 T indukciójú mágneses mezőbe vezetjük őket. Az indukció vektora merőleges a sebességre.

(a) Milyen pályán mozognak az ionok? Adjuk meg a 238-as ill. a 235-ös uránizotópot tartalmazó ionpályák jellemző paramétereit.

(b) Ezen a módon szét lehet választani a 235-ös és a 238-as izotópokat egymástól. A II. világháború alatt az USA-ban rendelkezésre álló ionforrások 1 mA-es ionáramot tudtak előállítani. Mennyi ideig tartott volna 1 kg teljesen tiszta 235-ös urán előállítása ezzel a módszerrel?

#### 2. feladat. (03-1-6)

Az  $^{235}\text{U}$  és az  $^{238}\text{U}$  izotópok diffúziós szétválasztásánál, amely a részecskék relatív sebességkülönbségén alapuló eljárás, gáz halmazállapotú  $\text{UF}_6$  (urán-hexafluorid) vegyületet használnak.

(a) Az  $^{235}\text{U}$ -t vagy az  $^{238}\text{U}$ -t tartalmazó molekulának nagyobb a sebessége?

(b) Mekkora a sebességek aránya?

#### 3. feladat. (00-2-9)

Képzeld el, hogy a Szabadalmi Hivatalban dolgozol. Szabadalmi beadvány érkezik, amely azt javasolja, hogy az urán dúsítására eddig használt urán-hexafluorid ( $\text{UF}_6$ ) gáz helyett urán-hexakloridot ( $\text{UCl}_6$ ) használjanak. Azzal érvel, hogy ez a vegyület sokkal kevésbé mérgező és korrozív, mint az  $\text{UF}_6$ , s ezért a dúsítóberendezések sokkal olcsóbb anyagokból is felépíthetők lennének. Az  $\text{UCl}_6$  kémiai tulajdonságait nem ismered. Tudsz-e mégis véleményt mondani erről a javaslatról?

#### 4. feladat. (03-2-3)

Egy 1 MeV kezdeti energiával keletkezett hasadási neutron grafitmoderátorban bolyong, és sorozatosan ütközik szén atommagokkal. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szén atommagok nem mozognak (0 K közelére hűtött grafit), valamint, hogy minden ütközés egyenes ütközés.

(a) Mozgási energiájának hányad részét veszíti el a neutron az első ütközésben?

(b) Legalább hányszor kell ütköznie, hogy mozgási energiája 0,025 eV („szobahőmérséklet”) alá csökkenjen?

#### †5. feladat. (03-2-9)

Elektronok igen nagy energiára történő felgyorsításához lineáris gyorsítóban kevesebb energia szükséges, mint ciklikus berendezésekkel. Vajon miért? Hasonlítsuk össze ilyen szempontból az ugyanolyan energiára felgyorsított protonokat és elektronokat.





## A. függelék

# Állandók, mennyiségek, mértékegységek

### A.1. Mennyiségek és SI-mértékegységeik

Mennyiség	Jele	SI-egység	Mennyiség	Jele	SI-egység
Tömeg	$m$	kg	Sebesség	$v$	$\text{m s}^{-1}$
Hosszúság	$\ell$	m	Gyorsulás	$a$	$\text{m s}^{-2}$
Idő	$t$	s	Lendület	$p, I$	$\text{kg m s}^{-1} = \text{N s}$
Áramerősség	$I$	A	Erő	$F$	$\text{kg m s}^{-2} = \text{N}$
Hőmérséklet	$T$	K	Perdület	$L$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1} = \text{J s}$
Anyagmennyiség	$n$	mol	Energia	$E$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = \text{J}$
Fényáram	$I_v$	cd	Teljesítmény	$P$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} = \text{W}$
Síkszög	$\alpha$	rad	Feszültség	$U$	$\text{W A}^{-1} = \text{V}$
Térszög	$\Omega$	sr	Töltés	$Q$	$\text{A s} = \text{C}$
Darabszám	$N$	1	Aktivitás	$A$	$\text{s}^{-1} = \text{Bq}$
Frekvencia	$f, \nu$	$\text{s}^{-1} = \text{Hz}$	Elnyelt sugárdózis	$D$	$\text{J kg}^{-1} = \text{Gy}$
Hullámhossz	$\lambda$	m	Egyenértékdózis	$H$	$\text{J kg}^{-1} = \text{Sv}$

### A.2. Állandók, mértékegységek

Az atomi, atommagi méretek miatt számos olyan, nem-SI-, vagy nem SI-alapmértékegységet alkalmazunk, amely a számításokat megfoghatóbbá, egyszerűbbé teszi. Ezeket az egységeket és elemi fizikai állandókat foglalunk össze a következő táblázatokban.

### A.2.1. Az SI-mértékegységek elé illeszthető prefixumok és ezek értéke

Prefixum	Jel	Szorzó	Prefixum	Jel	Szorzó
yotta	Y	$10^{24}$	yocto	y	$10^{-24}$
zetta	Z	$10^{21}$	zepto	z	$10^{-21}$
exa	E	$10^{18}$	atto	a	$10^{-18}$
peta	P	$10^{15}$	femto	f	$10^{-15}$
tera	T	$10^{12}$	piko	p	$10^{-12}$
giga	G	$10^9$	nano	n	$10^{-9}$
mega	M	$10^6$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
kilo	k	$10^3$	milli	m	$10^{-3}$
hekto	h	$10^2$	centi	c	$10^{-2}$
deka	da/dk	$10^1$	deci	d	$10^{-1}$

### A.2.2. Alapvető állandók

A következő táblázatokban gyűjtjük össze a gyakorlat szempontjából fontos állandókat. Ezek között fontos fizikai állandók, és mikrofizikai mértékegységek találhatók. Számos állandót mértékegységként is használunk. Az elektronvoltot és a parsecet ezek közül SI-előtagokkal is elláthatjuk. A táblázatban néhány, régebben elterjedt, ma nem szabályos mértékegység is szerepel, ezeket \* jelöli.

Mennyiség	Jele	Érték	Egység
Fénysebesség vákuumban	$c$	$2,998 \cdot 10^8$	$\text{m s}^{-1}$
A vákuum permittivitása	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12}$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$
A vákuum permeabilitása	$\mu_0$	$1,257 \cdot 10^{-7}$	$\text{V s A}^{-1} \text{m}^{-1}$
Coulomb-állandó	$k_C = 1/4\pi\epsilon_0$	$8,988 \cdot 10^9$	$\text{V m A}^{-1} \text{s}^{-1}$
Gravitációs állandó	$G, \gamma$	$6,674 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Planck-állandó	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34}$	$\text{J s}$
	$hc$	$4,136 \cdot 10^{-15}$	$\text{eV s}$
	$hc$	$1,986 \cdot 10^{-25}$	$\text{J m}$
	$hc$	$1,240 \cdot 10^3$	$\text{MeV fm}$
Redukált Planck-állandó	$\hbar$	$1,055 \cdot 10^{-34}$	$\text{J s}$
	$\hbar$	$6,582 \cdot 10^{-16}$	$\text{eV s}$
	$\hbar c$	$3,162 \cdot 10^{-26}$	$\text{J m}$
	$\hbar c$	$1,973 \cdot 10^2$	$\text{MeV fm}$
Elemi töltés	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$\text{C}$
	$e/h$	$2,418 \cdot 10^{14}$	$\text{A J}^{-1}$
Bohr-magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9,274 \cdot 10^{-24}$	$\text{J T}^{-1}$
		$5,788 \cdot 10^{-5}$	$\text{eV T}^{-1}$
Magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$5,051 \cdot 10^{-27}$	$\text{J T}^{-1}$
		$3,152 \cdot 10^{-8}$	$\text{eV T}^{-1}$
Finomszerkezeti állandó	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7,297 \cdot 10^{-3}$	
	$\alpha^{-1}$	$1,370 \cdot 10^2$	
Rydberg-állandó	$R^* = m_e e^4 / 16h^3 \pi \epsilon_0^2$	$3,290 \cdot 10^{15}$	$\text{Hz}$

Menntység	Jele	Érték	Egység
Bohr-sugár	$R_\infty = R^*/c$	$1,097 \cdot 10^7$	$\text{m}^{-1}$
	$E^* = hR^* =$	$2,180 \cdot 10^{-18}$	J
	$= m_e e^4 / 32 \hbar^2 \pi^2 \epsilon_0^2$	$1,361 \cdot 10^1$	eV
	$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$	$5,292 \cdot 10^{-11}$	m
Avogadro-szám	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Atomi tömegség	u	$1,661 \cdot 10^{-27}$	kg
	uc <sup>2</sup>	$1,492 \cdot 10^{-10}$	J
Faraday-állandó	$F = N_A e$	$9,315 \cdot 10^2$	MeV
Egyetemes gázállandó	$R = N_A k$	$8,315$	$\text{C mol}^{-1}$
Boltzmann-állandó	$k$	$1,381 \cdot 10^{-23}$	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
		$8,617 \cdot 10^{-5}$	$\text{eV K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann állandó	$\sigma = (\pi^2/60)k^4/\hbar^3 c^2$	$5,670 \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Wien-állandó	$b = hc/k \cdot 4,9651 \dots$	$2,898 \cdot 10^{-3}$	mK
Az elektron ( $e^-$ ) adatai:			
Tömege	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31}$	kg
	$m_e c^2$	$5,486 \cdot 10^{-4}$	u
Fajlagos töltése	$-e/m_e$	$8,187 \cdot 10^{-14}$	J
		$5,110 \cdot 10^{-1}$	MeV
Moláris tömege	$M_e = N_a m_e$	$-1,759 \cdot 10^{11}$	$\text{C kg}^{-1}$
Compton-hullámhossza	$\lambda_C = h/m_e c$	$5,486 \cdot 10^{-7}$	$\text{kg mol}^{-1}$
	$\lambda_C/2\pi$	$2,426 \cdot 10^{-12}$	m
Mágneses momentuma	$\mu_e$	$3,862 \cdot 10^{-13}$	m
		$-9,285 \cdot 10^{-24}$	$\text{J T}^{-1}$
		$-1,001160$	$\mu_B$
		$-1,838 \cdot 10^3$	$\mu_N$
A müion ( $\mu^-$ ) adatai:			
Tömege	$m_\mu$	$1,884 \cdot 10^{-28}$	kg
	$m_\mu c^2$	$1,134 \cdot 10^{-1}$	u
Fajlagos töltése	$-e/m_\mu$	$1,693 \cdot 10^{-11}$	J
		$1,057 \cdot 10^2$	MeV
Moláris tömege	$M_\mu = N_a m_\mu$	$-8,506 \cdot 10^8$	$\text{C kg}^{-1}$
Compton-hullámhossza	$\lambda_{C,\mu} = h/m_\mu c$	$1,134 \cdot 10^{-4}$	$\text{kg mol}^{-1}$
	$\lambda_{C,\mu}/2\pi$	$1,173 \cdot 10^{-14}$	m
Mágneses momentuma	$\mu_\mu$	$1,868 \cdot 10^{-15}$	m
		$-4,490 \cdot 10^{-26}$	$\text{J T}^{-1}$
		$-4,842 \cdot 10^{-3}$	$\mu_B$
		$-8,891$	$\mu_N$
A tau-lepton ( $\tau^-$ ) adatai:			
Tömege	$m_\tau$	$3,168 \cdot 10^{-27}$	kg
	$m_\tau c^2$	$1,908$	u
Fajlagos töltése	$-e/m_\tau$	$2,847 \cdot 10^{-10}$	J
		$1,777 \cdot 10^3$	MeV
Moláris tömege	$M_\tau = N_a m_\tau$	$-5,058 \cdot 10^7$	$\text{C kg}^{-1}$
		$1,908 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg mol}^{-1}$

Mennyiség	Jele	Érték	Egység
Compton-hullámhossza	$\lambda_{C,\tau} = h/m_\tau c$ $\lambda_{C,\tau}/2\pi$	$6,977 \cdot 10^{-16}$ m $1,110 \cdot 10^{-16}$ m	
A proton ( $p^+$ ) adatai:			
Tömege	$m_p$ $m_p c^2$	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg 1,007276 u $1,503 \cdot 10^{-10}$ J $9,383 \cdot 10^2$ MeV	
Fajlagos töltése	$e/m_p$	$9,578 \cdot 10^7$ C kg $^{-1}$	
Moláris tömege	$M_p = N_A m_p$	$1,007 \cdot 10^{-3}$ kg mol $^{-1}$	
Compton-hullámhossza	$\lambda_{C,p} = h/m_p c$ $\lambda_{C,p}/2\pi$	$1,321 \cdot 10^{-15}$ m $2,103 \cdot 10^{-16}$ m	
Mágneses momentuma	$\mu_p$	$1,411 \cdot 10^{-26}$ J T $^{-1}$ $1,521 \cdot 10^{-3}$ $\mu_B$ 2,793 $\mu_N$	
A neutron ( $n^0$ ) adatai:			
Tömege	$m_n$ $m_n c^2$	$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg 1,008665 u $1,505 \cdot 10^{-10}$ J $9,396 \cdot 10^2$ MeV	
Moláris tömege	$M_n = N_A m_n$	$1,009 \cdot 10^{-3}$ kg mol $^{-1}$	
Compton-hullámhossza	$\lambda_{C,n} = h/m_n c$ $\lambda_{C,n}/2\pi$	$1,320 \cdot 10^{-15}$ m $2,100 \cdot 10^{-16}$ m	
Mágneses momentuma	$\mu_n$	$-9,662 \cdot 10^{-27}$ J T $^{-1}$ $-1,042 \cdot 10^{-3}$ $\mu_B$ -1,913 $\mu_N$	
Az alfa-részecske ( $\alpha$ ) adatai:			
Tömege	$m_\alpha$ $m_\alpha c^2$	$6,645 \cdot 10^{-27}$ kg 4,001506 u $5,972 \cdot 10^{-10}$ J $3,727 \cdot 10^3$ MeV	
Moláris tömege	$M_\alpha = N_A m_\alpha$	$4,002 \cdot 10^{-3}$ kg mol $^{-1}$	
Elektronvolt	eV $eV/c^2$ $eV/k$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J $1,783 \cdot 10^{-36}$ kg $1,160 \cdot 10^4$ K	
Atomi tömegegység	u	$1,661 \cdot 10^{-27}$ kg	
Planck-alapegységek:			
Planck-tömeg	$m_P = \sqrt{\hbar c/G}$	$2,176 \cdot 10^{-8}$ kg	
Planck-hosszúság	$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$1,616 \cdot 10^{-35}$ m	
Planck-idő	$t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$5,391 \cdot 10^{-44}$ s	
Planck-töltés	$Q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$1,876 \cdot 10^{-18}$ C	
Planck-hőmérséklet	$T_P = \sqrt{\hbar c^5/G}/k$	$1,417 \cdot 10^{32}$ K	
Természetes alapegységek (t.e.):			
Hosszúság t.e.	$l_{\text{nu}} = \hbar/m_e c$	$3,862 \cdot 10^{-13}$ m	
Idő t.e.	$t_{\text{nu}} = \hbar/m_e c^2$	$1,288 \cdot 10^{-21}$ s	
Tömeg t.e.	$m_{\text{nu}} = m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg	

Mennyiség	Jele	Érték	Egység
Töltés t.e.	$Q_{\text{nu}} = e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	C
Hőmérséklet t.e.	$T_{\text{nu}} = m_e c^2 / k$	$5,930 \cdot 10^9$	K
*ångström	Å	$1 \cdot 10^{-10}$	m
*curie	Ci	$3,7 \cdot 10^{10}$	Bq
*rad	rd	$1 \cdot 10^{-2}$	Gy
*rem	rem	$1 \cdot 10^{-2}$	Sv
csillagászati egység	au	$1,496 \cdot 10^{11}$	m
fényév	ly	$9,461 \cdot 10^{15}$	m
parsec	pc	$3,086 \cdot 10^{16}$	m
perc	min	$6 \cdot 10^1$	s
óra	h	$3,6 \cdot 10^3$	s
nap	nap, d	$8,64 \cdot 10^4$	s
év	év, y	$3,156 \cdot 10^7$	s

Az elemi részecskék tömegeinek arányai:

	$m_e$	$m_\mu$	$m_\tau$	$m_p$	$m_n$	$m_\alpha$
$1 m_e$	1	$4,836 \cdot 10^{-3}$	$2,876 \cdot 10^{-4}$	$5,446 \cdot 10^{-4}$	$5,439 \cdot 10^{-4}$	$1,371 \cdot 10^{-4}$
$1 m_\mu$	206,77	1	$5,945 \cdot 10^{-2}$	0,1126	0,1125	$2,835 \cdot 10^{-2}$
$1 m_\tau$	3447,5	16,818	1	1,8939	1,8913	0,4767
$1 m_p$	1836,2	8,8802	0,5280	1	0,9986	0,2517
$1 m_n$	1838,7	8,8925	0,5287	1,0014	1	0,2521
$1 m_\alpha$	7294,3	35,275	2,0978	3,9726	3,9670	1

### A.2.3. Elektromágneses hullámok adatai

A táblázatban az elektromágneses színek tartományait soroljuk fel. A tartományok határai a fényt leszámítva csak hozzávetőlegesek:

Elnevezés	Hullámhossz (m)	Frekvencia (Hz)	Energia(J)
hangfrekvenciás hullámok	$10^7-10^4$	30-30000	$2 \cdot 10^{-31}-2 \cdot 10^{-28}$
AM-rádióhullámok	$10^4-10$	$3 \cdot 10^4-3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{-28}-2 \cdot 10^{-25}$
rádióhullámok	10-0,3	$3 \cdot 10^7-10^9$	$2 \cdot 10^{-25}-7 \cdot 10^{-24}$
mikrohullámok	$0,3-3 \cdot 10^{-3}$	$10^9-10^{11}$	$7 \cdot 10^{-24}-7 \cdot 10^{-22}$
infravörös hullámok	$3 \cdot 10^{-3}-$ $-7,8 \cdot 10^{-7}$	$10^{11}-$ $-3,85 \cdot 10^{14}$	$7 \cdot 10^{-22}-$ $-2,55 \cdot 10^{-19}$
látható fény	$7,8 \cdot 10^{-7}-$ $-3,8 \cdot 10^{-7}$	$3,85 \cdot 10^{14}-$ $-7,9 \cdot 10^{14}$	$2,55 \cdot 10^{-19}-$ $-5,23 \cdot 10^{-19}$
ultraibolya fény	$3,8 \cdot 10^{-7}-$ $-10^{-8}$	$7,9 \cdot 10^{14}-$ $-3 \cdot 10^{16}$	$5,23 \cdot 10^{-19}-$ $-2 \cdot 10^{-16}$
röntgensugárzás	$10^{-8}-3 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{16}-10^{18}$	$2 \cdot 10^{-16}-7 \cdot 10^{-14}$
gamma-sugárzás	$3 \cdot 10^{-10}-$	$10^{18}-$	$7 \cdot 10^{-14}-$

A Fraunhofer-féle vonalak (spektroszkópiai alappontok):

Elem	Név	$\lambda$ (nm)	Elem	Név	$\lambda$ (nm)	Elem	Név	$\lambda$ (nm)
K	$\alpha$	769,898	Fe	$b_3$	517,160	Ca	H', K	393,367
		766,491	Hg	$b_4$	516,732	Fe	L	382,589
O	A	760,82	Fe	c	495,760			382,118
O	B	686,72	Fe	d	466,813			382,043
Cd	C'	643,847	H	$\beta, F$	486,132			381,584
O	$\alpha$	628,29	Fe	e	438,354	Fe	M	373,487
H	$\alpha, C$	656,279	H	$\gamma, G'$	434,046			372,438
Na	$D_1$	589,593	Fe	f	432,576			371,993
Na	$D_2$	588,997	Ca	G	430,774	Fe	N	358,120
He	$D_3$	587,562	Ca	g	422,673	Fe	O	344,061
Fe	E	527,036	H	$\delta, H$	410,174	Ca	R	317,934
		526,954	K	$\beta$	404,720	Fe	S	310,067
Hg	$b_1$	518,360			404,414	Fe	s	304,761
Hg	$b_2$	517,268	Ca	H	396,848			

## B. függelék

# Irodalomjegyzék

A következő könyvek a Szilárd Leó Országos Fizikaversenyre való felkészüléshez, az ott szerepléshez nagyon hasznosak, meglétük fontos a jegyzet jó használhatóságához:

1. Marx György, *Atommagközelben*, Mozaik Oktatási Stúdió (Szeged, 1996).
2. Kopcsa József (szerk.), *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 1998–2004*, Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány (Paks, 2005).
3. Szűcs József (szerk.), *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 2005–2010*, Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány (Paks, 2011).
4. Dr. Radnai Gyula et al., *Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2004; több kiadás).

A megadott kiadási adatok változhatnak, a bibliográfia a könyv szerkesztése során használt kiadásokat tartalmazza. A könyvhöz kisebb mértékben más források is felhasználásra kerültek, ezek közül néhány fontosabb:

5. Holics László, *Fizika III.*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1993).
6. Tóth Eszter, *Fizika IV.*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1997).
7. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Mai fizika (2. kötet)*, Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1970).
8. Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, David B. Newell, CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006, *Rev. of Modern Phys.* **80** (April–June 2008), p. 633–730. (Interneten: [http://physics.nist.gov/cuu/Constants/RevModPhys\\_80\\_000633acc.pdf](http://physics.nist.gov/cuu/Constants/RevModPhys_80_000633acc.pdf). Az A. függelék adatainak forrása: Tables XLIX–LIII.)
9. Hraskó Péter, *A relativitáselmélet alapjai*, Typotex (Budapest, 2009).
10. Geszti Tamás, *Kvantummechanika*, Typotex (Budapest, 2011).



A feladatok forrása (a már megemlítettéken kívül):

11. *Közéiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* (Budapest).
12. Gnädig Péter, Honyek Gyula, *123 furfangos fizika feladat*, Eötvös Loránd Fizikai Társulat (Budapest, 1997).
13. Radnóti Katalin (szerk.), *Így oldunk meg atomfizikai feladatokat*, Mozaik Oktatási Stúdió (Szeged, 1995).
14. Légrádi Imre, *Atomfizikai feladatok*, Műszaki Kiadó (Budapest, 1986).
15. Holics László et al., *Gimnáziumi összefoglaló feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1987).
16. Moór Ágnes, *Közéiskolai fizikapéldatár*, Cser Kiadó (Budapest, 2009; több kiadás).
17. *Vigh Máté és Jaan Kalda feladatai*.

A jegyzet alapvetően a Szilárd Leó Országos Fizikaversenyre való felkészülést szolgálja. A versenyről információk a [www.szilardverseny.hu](http://www.szilardverseny.hu) oldalon találhatóak.

## C. függelék

# A feladatok megoldásai

### C.1. A kvantumelmélet alapjai

#### C.1.1. Hőmérsékleti sugárzás, fotonok

1. A szál ellenállása  $R = \varrho(T)\ell / \frac{d^2\pi}{4}$ , az elektromos teljesítmény  $P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\varrho(T)\ell} \frac{d^2\pi}{4}$ . A hőszugárzással leadott hőteljesítmény:  $P = \sigma \cdot d\pi\ell \cdot T^4$ . Termikus egyensúlyban e két teljesítmény egyenlő kell legyen:

$$\frac{U^2}{\varrho(T)\ell} \frac{d^2\pi}{4} = \sigma \cdot d\pi\ell \cdot T^4 \rightarrow U^2 d = 4\sigma\varrho(T)\ell^2 T^4 = 4\sigma \frac{\varrho_{20^\circ\text{C}}}{293 \text{ K}} \ell^2 T^5$$

$$T = \sqrt[5]{\frac{U^2 d \cdot 293 \text{ K}}{4\sigma\varrho_{20^\circ\text{C}}\ell^2}} = 2490 \text{ K.}$$

2. Tekintsük a szál  $\ell$  hosszú darabját. Ezen a hőmérsékleti sugárzás következtében  $P = \sigma \cdot 2r\pi\ell \cdot T^4$  hőteljesítmény sugárzódik ki. Ha a szál hőmérséklete  $dT$ -vel változik meg, a belső energia megváltozása  $dE = cmdT = c \cdot r^2\pi\ell\varrho \cdot dT$ . A  $dt$  idő alatt kisugárzódó hő következtében bekövetkező hőmérséklet-változás így fejezhető ki:

$$-\sigma \cdot 2r\pi\ell \cdot T^4 dt = c \cdot r^2\pi\ell\varrho \cdot dT \rightarrow \frac{dT}{T^4} = -\frac{2\sigma}{r\varrho c} dt$$

Integrálva a folyamatra és átrendezve a lehűlés idejére

$$t = \frac{r\varrho c}{6\sigma} \left( \frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} \right)$$

adódik, a két esetben kapott numerikus értékek: (a) –  $1,16 \cdot 10^{-3}$  s, (b) – 0,544 s.

3. A műhold csak az ablakon keresztül cserél hőt a környezetével. Ha a belső hőmérséklet  $T$ , az abszolút fekete műholdbelső  $P^* = \sigma T^4$  hőteljesítményt bocsát ki egységnyi felületen, termikus egyensúlyban ez meg kell egyezzen a bejövő hőmennyiséggel. Átrendezés után:  $T = \sqrt[4]{P^*/\sigma} = 391 \text{ K}$ .

4. A távolodó csillag fényének hullámhossza a Doppler-effektus következtében megnő, a relativisztikus képlet szerint  $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ , innen a csillagból kiinduló fényben a legnagyobb intenzitású hullámhossz  $\lambda_0 = \lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = 714 \text{ nm}$ . Wien törvényéből  $T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} / \lambda_0 = 4062 \text{ K}$ .

5. Klasszikus közelítést használunk (ennek jogosságát könnyen igazolni lehet). Legyen az elektron lendülete  $p$ , tömege  $m$ , a foton energiája  $\varepsilon$ . A feladat két feltétele így fogalmazható meg:  $\frac{p^2}{2m} = \frac{\varepsilon}{q}$ ;  $p = \frac{\varepsilon}{c}q$ . Az utóbbiból  $\varepsilon = \frac{pc}{q}$ , ezt beírva az első egyenletbe és egyszerűsítve:  $p = \frac{2mc}{q^2}$ ; ebből  $\varepsilon = \frac{2mc^2}{q^3}$ , a frekvencia pedig  $f = \frac{2mc^2}{hq^3}$ . A numerikus értékek: (a)  $-2,47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  (infravörös); (b)  $-3,09 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$  (gamma).

6. (a) A foton energiája  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ , ebből a  $P$  teljesítményű forrás  $n = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P\lambda}{hc} = 1,59 \cdot 10^{16} \text{ 1/s}$  darabot bocsáthat ki egységnyi idő alatt.

(b) Az 1 másodperc alatt kibocsátott fotonok egy 1 fénymásodperc hosszú és  $\frac{d^2\pi}{4}$  keresztmetszetű hengerben helyezkednek el egyenletesen, így a fotonok számsűrűsége  $\varrho = \frac{n}{cd^2\pi/4} = \frac{4}{d^2\pi} \frac{P\lambda}{hc^2} = 1,69 \cdot 10^{13} \text{ 1/m}^3$ .

7. (a) Az  $A$  felületre  $t$  idő alatt érkező fotonok összes energiája nyilván  $P^*At$ -vel egyenlő; e fotonok összlendülete pedig  $Ft = pAt$ ; figyelembe véve, hogy minden foton energiája  $c$ -szerese a lendületének, a következő összefüggés igaz:  $P^*At = pAt \cdot c$ , innen a nyomás  $p = P^*/c = 4,54 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$ . (b) A Föld homlokfelülete a főkör területével egyenlő, így a ható erő  $F = p \cdot R^2\pi = 5,78 \cdot 10^8 \text{ N}$ .

8. (a)  $E = P^* \frac{D^2\pi}{4} \varepsilon \cdot 1 \text{ h} = 500 \text{ MJ}$ . (b) A hasznos „munka”:  $E_h = nE_k = \frac{m}{M}E_k$ , az összes fényenergia pedig  $E_t = 5E$ , a hatásfok tehát  $\eta = \frac{m}{M} \frac{E_k}{5E} = 1,68 \%$ .

9. (a)  $E = \frac{hc}{\lambda} = 3,00 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

(b) A fotonok beesési gyakorisága  $n = \frac{P}{E} = \frac{P\lambda}{hc}$ , a  $T$  idő alatt visszavert fotonok száma (a fotonok  $1 - \varepsilon$  része verődik vissza)  $N = nT(1 - \varepsilon) = \frac{(1-\varepsilon)P\lambda T}{hc} = 6,68 \cdot 10^{16}$ .

(c) A visszaverődő fotonok lendületének kétszerese, az elnyelődőeknek csak egyszerese adódik át a lemeznek. Az  $A = \frac{d^2\pi}{4}$  felületre  $\Delta t$  idő alatt eső fotonok összlendülete  $P\Delta t/c$ , az összes átadott lendület tehát  $\Delta I = \frac{P\Delta t}{c}(\varepsilon + 2(1 - \varepsilon))$ ; a nyomás innen  $p = \frac{F}{A} = \frac{\Delta I}{\Delta t \cdot A} = \frac{4P}{cd^2\pi}(2 - \varepsilon) = 2,55 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ .

(d) Az összes foton lendülete  $I = \frac{PT}{c}$ , a lemeznek átadott lendület  $\Delta I = I(\varepsilon + 2(1 - \varepsilon))$ , a lemez sebessége  $v = \frac{\Delta I}{m} = \frac{PT}{mc}(2 - \varepsilon) = 8 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ .

10.  $n = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P}{hf} = 7,69 \cdot 10^{29} \text{ 1/s}$ .

11. A rendszer frekvenciája  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$ , a felvehető energiakvantum tehát  $\varepsilon = hf = \hbar \sqrt{D/m} = 5,28 \cdot 10^{-33} \text{ J}$ .

### C.1.2. Fotoelektromos jelenség

1. Ha az  $U$  ellenfeszültség éppen felemésztja az elektron mozgási energiáját, a munkatételt alkalmazva  $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ . Ezt a fotoelektromos egyenletben alkalmazva:  $\frac{hc}{\lambda} = W + eU$ , innen  $W = \frac{hc}{\lambda} - eU = 7,26 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

2. A fenti egyenletet a kék és a zöld fotonra felírva és azokat egymásból kivonva  $e\Delta U = h\Delta f$  adódik, a frekvenciakülönbség tehát  $\Delta f = \frac{e}{h}\Delta U = 7,74 \cdot 10^{13}$  Hz.

3. (a)  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 4,67 \cdot 10^{-19}$  J. (b)  $n = \frac{P}{\varepsilon} = 1,07 \cdot 10^{19}$  1/s.

(c) A fotoelektromos egyenletet  $v$ -re átrendezve  $v = \sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon - W)} = 7,66 \cdot 10^5$  m/s.

(d) Az 1. feladat gondolatmenete alapján  $eU = \varepsilon - W$ , innen  $U = \frac{\varepsilon - W}{e} = 1,67$  V.

(e) A kondenzátor töltése  $Q = CU$ , ami  $N = \frac{CU}{e} = 2,08 \cdot 10^{10}$  elektron töltése.

4. (a)  $v = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{hc}{\lambda} - W)} = 2,15 \cdot 10^5$  m/s. (b) Időegységként  $n = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{P\lambda}{hc}$  foton esik be, így az áram  $I = \frac{en}{5} = \frac{Pe\lambda}{5hc} = 887$   $\mu$ A lesz.

5. A foton és az elektron energiája és lendülete közti összefüggés:  $E_e = p_e^2/2m$ ,  $E_f = p_f c$ . A fotoelektromos egyenlet szerint  $E_f = E_e + W$ ; beírva az energiakifejezéseket és osztva  $c$ -vel:  $p_f = p_e^2/2mc + W/c$ . A vizsgált arány reciproka:  $1/k = p_f/p_e = p_e/2mc + W/p_e c$ ; a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséggel becslve:  $1/k \geq 2\sqrt{p_e/2mc \cdot W/p_e c} = \sqrt{2W/mc^2}$ , innen  $k$  maximuma  $\sqrt{mc^2/2W} = 358$ . Egyenlőség akkor áll, ha  $p_e/2mc = W/p_e c$ , amiből  $E_e = p_e^2/2m = W$ , így  $E_f = 2W$ , a kritikus hullámhossz  $\lambda^* = hc/E_f = hc/2W = 310$  nm.

6. A maximális elérhető feszültség az 1. feladat gondolatmenete alapján  $U = (hc/\lambda - W)/e$ . A hasznos energia ezért  $E_h = CU^2/2$ , a feltöltéshez használt összes energia  $E_t = n\varepsilon = CU/e \cdot \varepsilon$  (itt  $n$  a feltöltéshez szükséges elektronok, így fotonok száma, amit a kondenzátor töltéséből számolunk). A hatásfok:  $\eta = E_h/E_t = eU/2\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{hc/\lambda - W}{hc/\lambda} = 17,0\%$ . (Érdekes, hogy a hatásfok soha nem emelkedhet 50% fölé.)

7. (a) A foton energiája nagyobb kell legyen, mint a kilépési munka:  $hc/\lambda > W$ , innen  $\lambda < hc/W = 288$  nm. (b)  $n = Q/e$  elektront kell kiütni a fémlmezéből, ehhez  $n$  foton kell, amelyek energiája minimum  $nW$ . Ennyi energia beérkezéséhez  $t = nW/P = QW/eP = 4,31 \cdot 10^{-4}$  s idő kell, ami tényleg elég pillantszerű.

8. Az elektronokat a lemezek közti elektromos tér eltéríti, így azok a pozitív töltésű lemezbe csapódnak, a lemez töltése emiatt csökkenni fog. Végül az elektronsugár éppen elhalad a lemez mellett, így áll be az egyensúly. Az elektromos térbe belépő elektronok gyakorlatilag vízszintesen fognak haladni, a fotoelektromos egyenlet szerint  $v = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{hc}{\lambda} - W)}$  sebességgel, ezzel a sebességgel  $t = L/v$  ideig tart a téren való végighaladás. Az elektromos tér jó közelítéssel homogén,  $E = U/D$  nagyságú, ahol  $U$  a két lemez közti feszültség. Az elektron gyorsulása ebben a térben  $a = eE/m = eU/Dm$ , ezzel  $t$  idő alatt  $at^2/2$  mértékben térül el. Egyensúlyban ez a távolság  $\ell$ :

$$\ell = \frac{1}{2} \frac{eU}{Dm} \frac{L^2 m}{2(\frac{hc}{\lambda} - W)} = \frac{L^2 eU}{4D(\frac{hc}{\lambda} - W)} \rightarrow U = \frac{4D\ell}{L^2 e} \left( \frac{hc}{\lambda} - W \right) = 0,3779 \text{ V.}$$

9. (a) A lemez környezetében  $E = \sigma/2\varepsilon_0$  nagyságú elektromos tér alakul ki (ez a Gauß-tétel egyszerű következménye), amely az elektronokat vonzza. A kiütdött elektron mozgási energiája  $K = hc/\lambda - W$ , amit ez az ellentér  $d = K/eE = 9,575$   $\mu$ m úton felemeszt. Az elektronok tehát legfeljebb ilyen távol juthatnak a lemeztől.

(b) A visszaérkező elektron kinetikus energiája az energiamegmaradás miatt  $K$ , innen a sebesség  $v = \sqrt{2K/m} = 4,361 \cdot 10^5$  m/s.

## C.2. Relativitáselmélet

### C.2.1. A relativitáselmélet előzményei

1. A fényóra a Lorentz-kontrakció miatt  $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$  hosszú lesz a laborrendszerben. Amikor a fényjel előre halad, az átéréshez szükséges  $t_1$  időtartam  $ct_1 = vt_1 + L'$  szerint  $t_1 = L'/(c - v)$ , a hátrafelé haladó fényjelre ez  $t_2 = L'/(c + v)$ . A két időtartam nem egyenlő, összegük viszont  $t = t_1 + t_2 = L' \frac{2c}{c^2 - v^2} = \frac{L'}{c} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , ami a Lorentz-dilatáció képlete. A Lorentz-dilatáció ezek szerint csak akkor igaz, ha két, azonos helyen bekövetkező esemény közti időtartamról beszélünk.

2. 1. megoldás: A Lorentz-kontrakció szerint a müon által „érezelt” út  $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2} = 499$  m, aminek befutásához  $t = L'/v = 1,67 \mu\text{s}$  idő kell. Ez kisebb a müonok élettartamánál, ezért jelentős részük eléri a Föld felszínét.

2. megoldás: A külső megfigyelő szerint a müon  $t' = L/v = 16,8 \mu\text{s}$  ideig van úton, ez viszont a Lorentz-dilatáció szerint csak  $t = t' \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1,67 \mu\text{s}$  sajátidőt jelent. . .

3. A Lorentz-kontrakció miatt az úrhajó hossza a megfigyelő szerint  $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , ezt az  $t = L'/v = L\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 v^2}}$  idő alatt teszi meg. Ebből az úrhajó sebessége  $v = Lc/\sqrt{c^2 t^2 + L^2} = 2,57 \cdot 10^8$  m/s.

4. A fénysebesség minden inerciarendszerben állandó: a fényjel  $c$  sebességű lesz.

5. A Lorentz-dilatáció miatt az utazás sajátideje  $t' = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = 99,8$  nap, ami az osztódási időnek majdnem pontosan ötszöröse. A baktériumok száma tehát  $2^5 = 32$ -szeresre,  $64$ -re nő.

### C.2.2. Relativisztikus kinematika

1. (a) A Lorentz-dilatációból következően  $v = c\sqrt{1 - t'^2/t^2} = 0,9972c$  ( $t'$  a Béla,  $t$  az András által átélt időtartam, azaz 3 és 40 év).

(b)  $L = t/2 \cdot v = 19,94$  fényév; (c)  $L' = t'/2 \cdot v = 1,496$  fényév.

2. (a)  $v_l = \frac{u+v}{1+uv/c^2} = \frac{7}{8}c$ ;  $v_f = \frac{v-u}{1-uv/c^2} = \frac{1}{4}c$ .

(b) A partról nézve a csónakosok által összesen megtett út:  $L = v_l t + v_f t \rightarrow t = L/(v_l + v_f) = 8$  s; ennyi idő alatt rendre  $s_l = tv_l = 2,1 \cdot 10^6$  km és  $s_f = tv_f = 6 \cdot 10^5$  km utat tesznek meg.

(c) A Lorentz-dilatációból a sajátidők  $t_f = t\sqrt{1 - v_f^2/c^2} = 3,87$  s és  $t_l = 7,75$  s.

3.  $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} = 0,946c$ .

4. A két képlet egy  $1 + v^2/c^2$  szorzóban tér el. A relatív hiba ezért akkor 2%, ha ez a szorzó 1,02, ebből  $v = 0,141c$ .

5. (a) A Földről nézve a találkozás feltétele:  $vt = w(t - \Delta t) \rightarrow t = w\Delta t/(w - v) = 22,5$  év; az ikrek tehát András indulása után 22,5 évvel találkoznak,  $L = tv = 7,5$  fényévre a Földtől.

(b) Ülünk bele András mozgási inerciarendszerébe. Ebben András nyugalomban van, Béla viszont először eltávolodik (a Földdel együtt), majd visszatér Andrásához. Ez az ikerparadoxon eredeti felállása, ezért a „nyugvó” András lesz az idősebb.

(c) A Lorentz-kontrakció szerint András  $L_A = L\sqrt{1-v^2/c^2} = 7,07$  fényév, Béla pedig  $L_B = 6$  fényév utat tett meg, rendre  $t_A = L_A/v = 21,2$  és  $t_B = 10$  év alatt.

### C.2.3. Relativisztikus dinamika

1.<sup>1</sup> A létrejött test (mozgási) tömege az ütközés után  $m_1 = m_0 + m_0/\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{8}{3}m_0$ , lendülete pedig  $p_1 = m_0v/\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{4}{3}m_0c$ . A létrejött test sebessége  $v = p_1/m_1 = 0,5c$ , nyugalmi tömege pedig  $m' = \sqrt{(m_1c^2)^2 - (p_1c)^2}/c^2 = 4/\sqrt{3}m_0$ .

2. Ismert, hogy a mágneses térben körpályán mozgó testekre (l. 9.4.1.), hogy  $p = eBr = 3,969 \cdot 10^{-19}$  kg m/s. A Lorentz-tényező:  $\gamma = \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}} = 0,1410$ , innen a mért élettartam a Lorentz-dilatáció szerint  $t' = t/\gamma = 15,61 \mu\text{s}$ .

3. (a) A két bomlástermék lendülete a megmaradás miatt azonos nagyságú, de ellentétes irányú lesz, legyen ez  $p$ . Ekkor a pozitron energiája  $\sqrt{m_e^2 + p^2}$ , a neutrínóé  $p$ , a nyugvó pioné pedig  $m_\pi$ . Az energiamegmaradás:  $m_\pi = p + \sqrt{m_e^2 + p^2}$ , innen  $p = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi}(c) = 136,5m_e c$ ,  $E_\nu = pc = 136,5m_e c^2$ ,  $E_e = \sqrt{m_e^2 + p^2} = 136,5m_e c^2$ , a két részecske energiája közti eltérés tehát elhanyagolhatóan kicsi.

(b) Legyen a pion lendülete  $\mathbf{p}_\pi$ , a pozitroné  $\mathbf{p}_e$ , a neutrínóé  $\mathbf{p}_\nu$ . A három lendületvektor derékszögű háromszöget alkot ( $\mathbf{p}_e \perp \mathbf{p}_\nu$ ), ebben felírva a Pitagorasztételt  $p_\pi^2 = p_e^2 + p_\nu^2$  adódik. Az energiamegmaradás:  $\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} = \sqrt{m_e^2 + p_e^2} + p_\nu$ , négyzetre emelve, és a gyökös kifejezést tartalmazó tagot a bal oldalra csoportosítva  $2E_e E_\nu = 2\sqrt{m_e^2 + p_e^2} p_\nu = m_\pi^2 + p_\pi^2 - m_e^2 - p_e^2 - p_\nu^2 = m_\pi^2 - m_e^2$ . A két termék energiájának szorzata tehát adott, az energiák összegét, a pion energiáját kellene minimalizálni. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva:  $E_\pi = E_e + E_\nu \geq 2\sqrt{E_e E_\nu} = \sqrt{2(m_\pi^2 - m_e^2)}$ , innen a minimális sebesség  $v_{\min} = \sqrt{1 - m_\pi^2/E_\pi^2}(c) = c\sqrt{\frac{m_\pi^2 - 2m_e^2}{2m_\pi^2 - 2m_e^2}} = 0,7071c$ .

4. Legyen a bejövő pozitron lendülete  $\mathbf{p}$ , a két fotoné  $\mathbf{p}_1$  és  $\mathbf{p}_2$ , ezek szöge  $\alpha$ . A lendületmegmaradást vektorosan felírva és az egyenletet négyzetre emelve (részletesen l. 3.1.):  $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \alpha$ . Mivel a fotonoknak nincs nyugalmi tömege, az energiamegmaradás:  $m + \sqrt{m^2 + p^2} = p_1 + p_2$ ; kivonva  $m$ -et és négyzetre emelve:  $m^2 + p^2 = m^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 m + 2p_2 m + 2p_1 p_2$ . Beírva az előző egyenletet és átrendezve:  $2m(p_1 + p_2) = 2p_1 p_2(1 - \cos \alpha)$ , azaz  $1 - \cos \alpha = \frac{m(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}$ . Mivel  $p_1 + p_2$  a rendszer teljes energiája, az állandó,  $p_1 p_2$  pedig akkor maximális (a számtani-mértani egyenlőtlenség miatt), ha  $p_1 = p_2$ , ekkor értéke  $p_1 p_2 = \frac{(p_1 + p_2)^2}{4}$ . Beírva, felhasználva az energiamegmaradást és  $k$  definícióját  $\cos \alpha^* = \frac{k-2}{k+2}$  adódik.

5. (a) Csak függőleges tér hat, ezért a vízszintes irányú lendületkomponens nem változik. Mivel az lendületvektor a végállapotban  $45^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel, azért a lendület vízszintes és függőleges komponense megegyezik, tehát  $p_v = \sqrt{2}p_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}mc$ ; innen  $v_v = \frac{p_v}{\sqrt{m^2 + p_v^2}} = \sqrt{\frac{9}{17}}c \approx 0,7276c$ .

(b) Az elektronon végzett munka a munkatételből:  $W = E_v - E_0 \approx 0,2077mc^2 = 106,1$  keV; az elektronra ható elektromos erő  $F = eE = 1,09$  MeV/m, innen a függő-

<sup>1</sup>Ebben a részben többször is  $c = 1$  egységrendszert használunk és erre nem hívjuk fel minden esetben a figyelmet.

legesen megteendő út  $s = W/F = 9,74$  cm.

**6.** Meggondolható (legkönnyebben a tömegközépponti rendszerben, ahol az összlendület 0), hogy a legkevesebb energiára akkor van szükség, ha a keletkező részecskék egymáshoz képest nem mozognak, azaz mindegyik lendülete ugyanannyi<sup>2</sup>.

(a) Legyen a bejövő proton lendülete  $p$ , ekkor a termékek lendülete  $p/4$  lesz. Az energiamegmaradás:  $m + \sqrt{m^2 + p^2} = 4\sqrt{m^2 + (p/4)^2} = \sqrt{16m^2 + p^2}$ . Négyzetre emelve és átrendezve:  $2m\sqrt{m^2 + p^2} = 14m^2$ , innen a proton (teljes) energiája  $E = 7mc^2$ .

(b) Legyen a két proton lendülete  $p$ . Az összlendület nulla, ezért az optimális esetben a termékek lendülete 0. Az energiamegmaradás:  $2\sqrt{m^2 + p^2} = 4m$ , innen a protonok energiája  $E = 2mc^2$ , ami sokkal kevesebb, mint az előző esetben.

**7.** Az előzőhöz hasonlóan az optimális eset, ha minden termék lendülete azonos lesz. Legyen a foton lendülete  $p$ , ekkor a termékek lendülete  $p/3$  lesz. Ekkor az energiamegmaradás:  $p + m = 3\sqrt{m^2 + (p/3)^2} = \sqrt{9m^2 + p^2}$ . Négyzetre emelve és átrendezve, a foton energiájára  $E_\gamma = 4mc^2$  adódik.

**8.** (a) A  $D_1$ -vonallaboratóriumi hullámhossza  $\lambda_0 = 589,593$  nm. A Dopplereffektusból a hullámhossz eltolódása (vöröseltolódásról beszélünk, ezért a galaxis távolodik)  $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ , innen a galaxis sebessége  $v_g = c \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} = 0,5c$ .

(b) A relativisztikus sebességösszeadás miatt az úrhajótól a galaxis  $v_r = \frac{v_s - v_g}{1 - v_s v_g / c^2} = 0,2c$  sebességgel távolodik, a mért hullámhossz tehát  $\lambda' = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v_r}{c-v_r}} = 722,101$  nm.

## C.3. A kvantumelmélet alkalmazásai

### C.3.1. Compton-szórás

**1.** (a) Legyen a közös lendület  $p$ . Az energiamegmaradás:  $mc^2 + mc^2 = pc + \sqrt{(mc)^2 + (pc)^2}$ , innen  $p = 3mc/4$ . A foton kezdeti lendülete  $mc$ ; az ennek irányára merőleges lendületmegmaradás miatt az ez irányú lendületkomponensek abszolút értékben megegyeznek, s mivel a teljes lendület is egyenlő, egyenlőnek kell lennie a bejövő foton irányába eső lendületkomponensnek is: ez a lendületmegmaradás miatt  $mc/2$ . Az eltérülés szöge:  $\cos \theta = (mc/2)/p = 2/3$ , innen  $\theta = 48,2^\circ$ ; a két lendület által bezárt szög  $2\theta = 96,4^\circ$ .

(b)  $v = pc/\sqrt{p^2 + (mc)^2} = 0,6c$ .

**2.** Ha a két esetben az eltérülés szöge  $\alpha$  és  $\beta$ , a teljes hullámhosszváltozás  $\Delta\lambda = \lambda_C(2 - \cos \alpha - \cos \beta)$ . Ez a következő esetekben lehetséges ( $0 \leq \alpha, \beta \leq 180^\circ$ ): (a)  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ; (b)  $\beta - \alpha = 90^\circ$ ; (c)  $\alpha - \beta = 90^\circ$ ; (d)  $\alpha + \beta = 270^\circ$ . A négy esetben az eltérülés szögének kifejezését trigonometriailag átalakítva és figyelembe véve az egyes szögek lehetséges értéktartományát, rendre  $[(2 - \sqrt{2})\lambda_C; \lambda_C]$ ,  $[\lambda_C; 3\lambda_C]$ ,  $[\lambda_C; 3\lambda_C]$  és  $[3\lambda_C; (2 + \sqrt{2})\lambda_C]$  adódik  $\Delta\lambda$  értékkészletére. Ezen intervallumok uniója adja a lehetséges hullámhosszváltozást:  $(2 - \sqrt{2})\frac{h}{mc} \leq \Delta\lambda \leq (2 + \sqrt{2})\frac{h}{mc}$ .

**3.** A foton hullámhossza akkor nő a leginkább, azaz akkor ad át maximális energiát

<sup>2</sup>Igazoljuk a tömegközépponti rendszerben az állítást és mutassuk meg, hogyan következik ebből tetszőleges rendszerre a feltétel!

az elektronnak, ha  $\theta = 180^\circ$ . Ekkor a  $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$  hullámhosszú foton hullámhossza  $\lambda = \frac{3h}{mc}$ -re nő, energiája tehát  $mc^2$ -ről  $\frac{mc^2}{3}$ -ra csökken. Az elektron mozgási energiája az energiamegmaradás miatt  $\frac{2}{3}mc^2$  lesz, teljes energiája  $\epsilon = \frac{5}{3}mc^2$ , innen sebessége  $v = c\sqrt{1 - \frac{(mc^2)^2}{\epsilon^2}} = 0,8c$ .

4. (a)  $\lambda' = \lambda + \frac{2h}{mc} = 54,85$  pm. (b)  $E = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = 3,51 \cdot 10^{-16}$  J. A nemrelativisztikus képlettel  $v = \sqrt{2E/m} = 2,78 \cdot 10^7$  m/s, ami hozzávetőleg  $c/10$ ; ilyenkor a relativisztikus tömegnövekedés kb. 0,5%-os, tehát elhanyagolható. (c) Ebben az esetben az elektron mozgási energiája legfeljebb  $mc^2/10$  lehet. A fenti képletből:  $E = hc \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = hc \frac{2h}{mc} \frac{1}{\lambda\lambda'} = mc^2/10$ ; innen  $\lambda\lambda' = \lambda(\lambda + 2\frac{h}{mc}) = 20\frac{h^2}{m^2c^2}$ . A másodfokú egyenlet pozitív gyöke  $\lambda = 3,58\frac{h}{mc} = 8,69$  pm; a foton energiája ennél kisebb, hullámhossza tehát ennél nagyobb lehet.

5.  $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos 90^\circ) = \frac{h}{mc} = 2,43$  pm.

6. (a)  $\lambda = \frac{hc}{\epsilon} = 2,483 \cdot 10^{-10}$  m. (b)  $\lambda' = \lambda + 2\frac{h}{mc} = 2,532 \cdot 10^{-10}$  m; az elektron energiája  $E = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = 1,53 \cdot 10^{-17}$  J ( $\ll mc^2$ ), sebessége  $v = \sqrt{2E/m} = 5,80 \cdot 10^6$  m/s. (c)  $(\lambda' - \lambda)/\lambda \cdot 100\% = 1,95\%$ -kal nagyobb.

7.  $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \rightarrow \cos \theta = 1 - \frac{\Delta\lambda \cdot mc}{h} = 0,5054 \rightarrow \theta = 59,6^\circ$ .

8.  $\lambda = \frac{hc}{\epsilon} = 3,10$  pm;  $\lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc} = 6,78 \cdot 10^{-13}$  m;  $\epsilon_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = 2,93 \cdot 10^{-13}$  J.

9.  $\frac{2h}{mc}$ , elektronra 4,85 pm, protonra 2,64 fm.

10. A végtelen, egyenletesen töltött fémsík elektromos tere mindkét térfélben homogén és attól elfelé mutat. Ebben a térben az elektronnra a lemez felé mutató, állandó erő hat. Az elinduló elektron tehát eltávolodik a lemeztől, majd visszaindul.

Az (a) esetben a mozgás a függőleges hajítással ekvivalens, így az elektron éppen a lyukba érkezik vissza, amelyen áthalad, majd a másik irányban is a függőleges hajításnak megfelelően eltávolodik, és így tovább. Az elektron ebben az esetben anharmonikus rezgőmozgást fog végezni a lemezre a lyukban állított merőleges mentén. A (b) esetben a mozgás a ferde hajítással ekvivalens; az elektron parabolapályán indul el, majd amikor ütközik a lemezzel, az felveszi (a becsapódás helyén nem lyukas a lemez).

### C.3.2. Cserenkov-sugárzás

1. Ha a részecskének a bejövő elektrónra merőleges lendületkomponense lenne, az tovább növelné a foton keltéséhez szükséges energiát, ezért a határesetben az elinduló fotonnak párhuzamosan kell haladnia az elektronnal. Legyen a foton lendülete  $p_f$ , kibocsátása előtt az elektron lendülete  $p$ . Az elektron lendülete a foton kibocsátása után ekkor  $p - p_f$ , az energiamegmaradás:  $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + (p - p_f)^2c^2} + p_fc_k$ . Négyzetre emelve és átrendezve:  $2pc^2 - p_f(c^2 + c_k^2) = 2c_k\sqrt{m^2c^4 + (p - p_f)^2c^2}$ . Ezt is négyzetre emeljük és rendezzük:  $p_f^2(c^2 - c_k^2)^2 - 4pp_fc^2(c^2 - c_k^2) + 4p^2c^2(c^2 - c_k^2) - 4m^2c^4c_k^2 = 0$ . Ez másodfokú egyenlet  $p_f$ -ben; a kritikus esetben az egyik gyök éppen 0 lesz: ekkor  $4p^2c^2(c^2 - c_k^2) - 4m^2c^4c_k^2 = 0$ , átrendezve  $p = \frac{mc_k}{1 - c_k^2/c^2}$ ; könnyen látható, hogy egy ilyen lendületű részecske sebessége éppen  $c_k$ . Az elektron tehát akkor képes fotont kibocsátani, ha sebessége legalább  $c_k$ .



### C.3.3. Broglie-féle anyaghullám

1.  $hc/\lambda = mc^2 \rightarrow \lambda = h/mc = 2,43$  pm (Compton-hullámhossz).

2.  $p = \sqrt{2mE} = 5,40 \cdot 10^{-25}$  N s,  $\lambda = h/p = 1,23$  nm.

3.  $p_p = \sqrt{2mE} = 2,59 \cdot 10^{-23}$  N s,  $p_f = E/c = 6,67 \cdot 10^{-28}$  N s. A lendületek aránya  $p_p/p_f = 3,88 \cdot 10^4$ , ennek reciproka a hullámhosszak aránya:  $\lambda_p/\lambda_f = 2,58 \cdot 10^{-5}$ .

4. A relativisztikus tömegnövekedés tízezred nagyságrendű, ezért nemrelativisztikusan számolunk.  $E = \frac{1}{2}mv^2 = 4,09 \cdot 10^{-18}$  J,  $\lambda = h/mv = 2,42 \cdot 10^{-10}$  m.

5.  $E = 3$  keV, nemrelativisztikusan számolunk.  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE} = 22,4$  pm.

6.  $\lambda = h/mv$ : (a)  $1,21 \cdot 10^{-10}$  m; (b)  $3,40 \cdot 10^{-34}$  m.

7. (a)  $\lambda = h/mv \rightarrow v = \frac{h}{m\lambda} = 1,10$  km/s. (b)  $eU = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow U = \frac{mv^2}{2e} = 3,44$   $\mu$ V.

8.  $eU_{\text{gy}} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2meU_{\text{gy}}} \rightarrow \lambda = h/p = h/\sqrt{2meU_{\text{gy}}} = 1,097 \cdot 10^{-11}$  m. Az első erősítési hely szöge  $\alpha = \frac{d}{2l} = 7,73 \cdot 10^{-2}$ . Az optikai rács tulajdonságaiból:  $a\alpha = \lambda \rightarrow a = \lambda/\alpha = 1,42 \cdot 10^{-10}$  m.

9. Az atommag átmérője fm nagyságrendű, így az elektronok hullámhossza is nagyságrendileg ennyi kell legyen.  $p = h/\lambda \approx 6 \cdot 10^{-19}$  Ns. Ez kb. három nagyságrenddel nagyobb, mint  $mc$ : az elektron sebessége hiperrelativisztikus, ezért  $E = pc \approx 1,2$  GeV.

10. Egy molekula méretének jellemző nagyságrendje  $10^{-9}$  m, a látható fény hullámhosszáé pedig  $10^{-7}$  m: ezzel megegyező nagyságrendű távolságok oldhatók fel, ezért egy molekula helyét csak néhány százalék pontossággal lehet megállapítani. Az adott pontosság eléréséhez  $10^{-10}$  m körüli hullámhosszú fotonok kellenének; ezek energiája viszont  $10^{-15}$  J nagyságrendű, ami kb. ezerszerese a molekuláris kötési energiának, egy ilyen foton tehát szétrombolná a molekulákat.

11. Az átlagos mozgási energia  $E = \frac{3}{2}kT$ ; a termikus lendület  $p = \sqrt{2mE} = \sqrt{3mkT}$ , az átlagos hullámhossz:  $\lambda = h/\sqrt{3mkT} = 7,38 \cdot 10^{-11}$  m.

12. Az energiamegmaradás:  $2 \cdot \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{kc_e^2}{d}$ , innen, figyelembe véve  $v_t$  értékét:  $d = \frac{kc_e^2}{3k_B T}$ . A Broglie-hullámhossz:  $\lambda = h/p = h/\sqrt{3mk_B T}$ . A feltétel:  $\frac{kc_e^2}{3k_B T} = \frac{h}{\sqrt{6mk_B T}} \rightarrow T = \frac{2mk_c^2 e^4}{3k_B h^2} = 9,7 \cdot 10^6$  K.

### C.3.4. A határozatlansági reláció

1.  $\Delta x \cdot m\Delta v = \hbar \rightarrow m = \hbar/\Delta x\Delta v \approx 10^{-30}$  kg (elektron).

2.  $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 7,0 \cdot 10^{-24}$  N s.  $\Delta v = \frac{\Delta p}{m}$ , ( $\alpha$ )  $7,7 \cdot 10^6$  m/s, ( $\beta$ )  $3,2 \cdot 10^{-21}$  m/s.

3.  $\Delta p = m\Delta v = \frac{mv}{100}$ .  $\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{100\hbar}{mv}$ , (a)  $3,3 \cdot 10^{-33}$  m, (b)  $1,6 \cdot 10^{-4}$  m.

4., 5. Az elektron minimális lendülete  $p = \frac{\hbar}{r}$ , energiája  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mr^2}$ . Ez neutronra kb.  $10^{-8}$  J, atommagra kb.  $10^{-10}$  J, ami sokkal nagyobb, mint a pJ nagyságrendű kötési energia. Elektron egyik rendszerben sem maradhat meg tartósan.

6. Tökéletes nyugalomban az energia és annak  $\Delta E$  szórása is 0. Egy ilyen állapot időbizonytalansága a  $\Delta E\Delta t = \hbar$  Heisenberg-reláció szerint végtelen lenne, ami nem

lehetséges. Tökéletes nyugalom tehát nincs. Az energia minimális értéke (a zérusponti energia) viszont meghatározható (harmonikus oszcillátorra). A Heisenberg-relációból:  $\hbar = m\Delta x\Delta v = mA^2\omega$ , az energia pedig  $m\frac{A^2\omega^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{2} = hf/2$ ; ez egyben az abszolút nulla fok elérhetetlenségét is magyarázza.

## C.4. Statisztikus fizika

### C.4.1. Entrópia

1. (a) Értjük el a  $(T_0, V_0)$  állapotból a  $(T, V)$  állapotot egy izotermikus és egy izochor állapotváltozással. Először a gáz térfogatát változtatjuk izotermikusan  $V$ -re: eközben a gázzal  $Q = NkT_0 \ln(V/V_0)$  hőt közlünk állandó  $T_0$  hőmérsékleten, az entrópiaváltozás eközben  $Nk \ln(V/V_0)$ . Az izochor állapotváltozás során egy  $t$  hőmérsékletről  $t + dt$  hőmérsékletre való áttéréshez  $dQ = \frac{f}{2} Nk dt$  hőátadás tartozik  $t$  hőmérsékleten: az entrópia differenciálja  $dS = \frac{f}{2} Nk \frac{dt}{t}$ , aminek integrálja  $T_0$ -tól  $T$ -ig  $\frac{f}{2} Nk \ln(T/T_0)$ , ez az entrópiaváltozás az izochor szakaszon. A folyamat során a teljes entrópiaváltozás  $\Delta S = Nk \left( \frac{f}{2} \ln(T/T_0) + \ln(V/V_0) \right)$ , mivel a kezdőállapotban az entrópiát 0-nak vesszük, ez lesz a gáz entrópiája a végállapotban.

(b) Az állapotegyenletet és a logaritmus tulajdonságait felhasználva:

$$S = Nk \left( \frac{f}{2} \ln(p/p_0) + \frac{f+2}{2} \ln(V/V_0) \right).$$

(c) Mivel az adiabatikus állapotváltozás közben nincs hőcsere, ezért az entrópia sem változhat meg (a folyamatot izentropikusnak is nevezik). A fenti entrópiakifejezés akkor nem változik meg  $(p_1, V_1)$  és  $(p_2, V_2)$  között, ha  $(f \ln p + (f+2) \ln V) / f$  állandó: ennek exponenciális  $pV^{\frac{f+2}{f}}$ , aminek állandósága éppen az adiabata szokásos egyenletét adja.

2. *Clausius-féle megfogalmazás:* tegyük fel, hogy egy hidegebb ( $T_1$ ) testről kevés  $q$  hő megy át egy melegebbre ( $T_2$ ). Ekkor a hidegebb test  $\frac{q}{T_1}$  entrópiát ad le, míg a melegebb ennél kevesebbet,  $\frac{q}{T_2}$  entrópiát vesz fel. A rendszer entrópiája csökkenne, ez azonban nem lehetséges. Ilyen folyamat tehát nincs.

*Kelvin-Planck-féle megfogalmazás:* ha létezne másodfajú perpetuum mobile, az a hőfelvétellel hőtartálya entrópiáját csökkentené, s mivel nem ad le hőt, entrópiánövelő folyamatokat nem végez. A rendszer entrópiája tehát csökkenne, ami nem lehetséges, ezért nincs másodfajú perpetuum mobile.

3. A közös hőmérséklet  $T = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$ , ennek eléréséig az 1. testre  $Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (T_2 - T_1)$  hő jut. Abban a pillanatban, amikor  $q$  hő ért át az 1. testre, a testek hőmérséklete  $t_1 = T_1 + \frac{q}{C_1}$  és  $t_2 = T_2 - \frac{q}{C_2}$ . Ekkor további  $dq$  hő átjutásával az egyes testek entrópiájának változása  $dS_1 = \frac{dq}{t_1}$  és  $dS_2 = \frac{dq}{t_2}$ . A két differenciál összegét 0-tól  $q = Q$ -ig integrálva, az entrópiaváltozás  $\Delta S = C_1 \ln(T/T_1) + C_2 \ln(T/T_2)$ .<sup>3</sup>

4. Ha a gázt izotermikusan a felére nyomjuk össze, az entrópia megváltozása a 4.3. egyenlet szerint  $-Nk \ln 2$  (most  $N = 1$ ). Mivel az entrópia nem csökkenhet, ezért ezt az entrópiacsökkenést a mérés során  $k \ln 2$  entrópia közlése kell megelőzze. Ennyi 1 bit entrópiáértéke.

<sup>3</sup>Bizonyítsuk be, hogy ez az érték mindig pozitív!

5. (a) Könnyű belátni, hogy az  $S - T$  állapotú síkon a görbe alatti terület a folyamatot kísérő hőcsere adja meg. A Carnot-folyamat (amely két adiabatikus és két izotermikus folyamatból áll) ezen az állapotú síkon téglalap. A felvett hő  $Q_{\text{fel}} = \Delta ST_1$ , a leadott hő pedig  $Q_{\text{le}} = \Delta ST_2$ , a hatásfok:  $\eta = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

(b) Vegyünk egy tetszőleges körfolyamatot az  $S - T$  állapotú síkon; a két hőtartály hőmérséklete a körfolyamat minimális és maximális hőmérséklete. Vegyük utána körbe ezt a körfolyamatot egy olyan téglalap alakú körfolyamattal, amely az előbbit minden oldalról érinti. E folyamat során kevesebb hőt ad le és többet vesz fel a rendszer, mint az eredeti folyamat során, így a  $\eta = 1 - \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$  hatásfok nagyobb lesz, mint az eredeti esetben. Mivel azonban a kapott folyamat egy Carnot-folyamat ugyanezen két hőtartály között, azt találtuk, hogy két hőtartály közötti tetszőleges körfolyamatok közül a legnagyobb hatásfokú a Carnot-körfolyamat.

6. A (b) állítás a statisztikus fizikai entrópiára, az (a) és (c) állítások a fenomenológikus entrópiára vonatkoznak, amely éppen a statisztikus fizikai entrópia egyensúlyban felvett maximuma. Mivel két különböző, entrópia nevű fogalomra vonatkozó tulajdonságokat kombináltunk össze, a következtetések nem lesznek igazak.

## C.4.2. Boltzmann-eloszlás

1. A rendszer energiája  $\frac{1}{2}DA^2$ . Mivel a rendszerben az energia két független módon (rugalmas és mozgási energia) tárolódhat, a termikus gerjesztés energiája  $kT$ : a kettő egyenlőségéből  $T = \frac{DA^2}{2k} = 3,6 \cdot 10^{17}$  K, ami irreálisan magas érték. Mechanikai rendszereken a termikus gerjesztés nem figyelhető meg.

2. A kondenzátor átlagos energiája  $\frac{1}{2}CU_{\text{eff}}^2$ , s mivel ez az energiatárolás egyik független formája, termikus gerjesztés hatására várható értéke  $\frac{1}{2}kT$ . A kettő egyenlőségéből  $U_{\text{eff}} = \sqrt{kT/C} = 9,38 \cdot 10^{-8}$  V adódik. Ez az effektus kimutatható, *termikus zajnak* (*rms noise*) nevezik.

3. A mozgási energia eloszlása nem függ a magasságtól, így csak a nehézségi erő okozta energiakülönbséggel kell foglalkozni.  $h$  magasságban egy molekula nehézségi potenciális energiája  $m^*gh$ , így a Boltzmann-faktor  $e^{-m^*gh/kT} = e^{-Mgh/RT}$ ,  $h$  magasságban a levegő sűrűsége tehát  $\rho(h) = \rho(0) \exp(-Mgh/RT)$ .<sup>4</sup>

4. Az atomoknak két energiaszintje van, a kristály belsejében és a felszínen, ezek energiakülönbsége  $\Delta E$ . A nagyobb energiájú állapot valószínűsége (azaz a vakancia-koncentráció)  $P = \frac{\exp(-\Delta E/kT)}{1 + \exp(-\Delta E/kT)} \approx \exp(-\Delta E/kT)$  (mivel az exponenciális sokkal kisebb, mint 1). A 300 K-re megadott vakanciakonzentrációból  $\Delta E = -kT \ln P = 1,462 \cdot 10^{-19}$  J, innen az 500 K-es koncentráció  $P' = \exp(-\Delta E/kT') = 6,4 \cdot 10^{-10}$ .

5. (a) Az oszcillátor energiaszintjei ismert módon  $E_n = nhf$  alakúak, ahol  $n$  egész szám. Az ilyen energiaszintekhez tartozó Boltzmann-faktor  $\exp(-nhf/kT) = a^n$ , ahol  $a = \exp(-hf/kT)$ . Az energia átlagértéke  $\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n a^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a^n} = hf \frac{a}{(1-a)^2} / \frac{1}{1-a} = hf \frac{a}{1-a} \approx hf \frac{1}{hf/kT} = kT$ , ami, mivel a harmonikus oszcillátornak két szabadsági foka van, éppen az ekvipartíció-tételt adja.

(b) A közelítésnél azt használtuk ki, hogy  $\exp(-hf/kT) \approx 1 - hf/kT \approx 1$ ; ez csak akkor igaz, ha  $hf/kT \ll 1$ , azaz ha  $T \gg \frac{hf}{k}$  (ez az atomi, molekuláris oszcillátorokra

<sup>4</sup>Vessük össze ezt az eredményt a barometrikus nyomásformulával!

is fennáll szobahőmérsékleten).

**6.** Az egydimenziós dobozzal foglalkozunk, a többdimenziós eset erre visszavezethető. Az  $\ell$  hosszú egydimenziós dobozban a kialakuló sajátállapotok Broglie-hullámhosszai  $\lambda = 2\ell/n$ , ahol  $n$  egész szám; a lendület lehetséges értékei  $p = h/\lambda = hn/2\ell$ , a megfelelő sebességkomponensé pedig  $v = \frac{h}{2m\ell}n$ . A lehetséges sebességértékek tehát egyenletesen oszlanak el, s ha  $\ell$  értéke elég nagy (a hétköznapi méret nagyságrendbe esik), a távolság elég kicsi köztük ahhoz, hogy eloszlásukat folytonosnak tekintsük. A kettőből együtt könnyen következik, amit bizonyítani akartunk.

**7.** (a) A rendszer energiája  $-Mgl$ , ahol  $l$  a lánc hossza, amely az egyes láncszemek hosszának az összege. A Boltzmann-faktort felírva, az elemi faktorok szorzatára bomlik:  $\exp(Mgl_i/kT)$ , ahol  $l_i$  az egyes láncszemek hossza, emiatt a láncszemek egymástól függetlenül állnak be a két állás valamelyikébe; egy láncszem várható hossza

$$\bar{l}_i = \frac{(d+a)\exp(Mg(d+a)/kT) + (d-a)\exp(Mg(d-a)/kT)}{\exp(Mg(d+a)/kT) + \exp(Mg(d-a)/kT)} = d + a \frac{\exp(Mga/kT) - \exp(-Mga/kT)}{\exp(Mga/kT) + \exp(-Mga/kT)},$$

a lánc teljes hosszának várható értéke tehát  $\bar{l} = Nd + Na \tanh(Mga/kT)$ , az energia várható értéke  $\bar{E} = -Mg\bar{l}$ .

(b) A hőkapacitás a rendszer energiájának hőmérséklet szerinti deriváltja:

$$C = \frac{M^2 g^2 N a^2}{kT^2} / \cosh^2(Mga/kT).$$

**8.** A mérést érdemes ténylegesen elvégezni (emelt szintű érettségi mérés). Ha erre nincs idő vagy eszköz, a következő adatsort használhatjuk:

$T$ (K)	283	291	297	311	319	326	332	339	347	354	361
$R$ ( $\Omega$ )	437	333	280	183	140,2	116,7	97,0	81,5	65,5	52,0	43,2

A 4.11. egyenlet szerint a két mennyiség közti kapcsolat  $R(T) = R_\infty \exp(\Delta E/kT)$ . Ezt az összefüggést olyan alakra kell hozni, hogy a két változó között lineáris legyen a kapcsolat. Megfelelő például a következő:  $\ln R = \ln R_\infty + \frac{\Delta E}{k} \frac{1}{T}$ .  $\frac{1}{T}$  és  $\ln R$  között tehát elméletileg lineáris a kapcsolat. Ábrázolva  $\ln R$ -et  $\frac{1}{T}$  függvényében, valóban egy egyenesre illeszkedő pontokat kapunk. Az egyenest meghúzva (grafikus egyenesillesztés)<sup>5</sup> a meredekség:  $m = \Delta E/k = (3,01 \pm 0,05) \cdot 10^3$  K, innen a tiltott sáv szélessége  $\Delta E = mk = (0,259 \pm 0,0041)$  eV.

## C.5. Atomfizika

### C.5.1. Kötött állapotú elektron

**1.** (a) A szinuszhullám menetéből:  $k = 0$ -nál a felezőpontban,  $k = 1$ -nél a negyedelőpontokban (a felezőpont viszont csomópont). (b) Az energiakülönbség:  $\Delta E = E_1 - E_0 = 3E_0 = \frac{3}{8} \frac{h^2}{md^2}$ , a numerikus értékek rendre  $2 \cdot 10^{-36}$  J,  $2 \cdot 10^{-30}$  J,  $2 \cdot 10^{-22}$  J,  $2 \cdot 10^{-18}$  J (kb. 10 eV). Láthatóan a legkisebb  $d$ -re a leglátványosabb az energiaszintek diszkrétisége.

**2.** Legyen a doboz két éle  $a$  és  $a/2$ . Ekkor az energiaszintek  $h^2/8ma^2(n_1^2 + 4n_2^2)$  ( $k_i + 1 = n_i$ ), ahol  $n_i \in \mathbb{Z}^+$ . Az energiaszinteket tehát leírják az  $n_1^2 + 4n_2^2$  kombinációk, így az első két olyan egész számot kell megkeresni, ami kétféleképpen áll elő ilyen

<sup>5</sup>Számítógépes programokat (pl. gnuplot) is használhatunk, ezekkel közvetlenül az  $R(T)$  függvényhez is illeszthető a görbe.

alakban. Ez  $20 = 2^2 + 4 \cdot 2^2 = 4^2 + 4 \cdot 1^2$  és  $40 = 2^2 + 4 \cdot 3^2 = 6^2 + 4 \cdot 1^2$ , így a keresett csomósíkszám-párok:  $(1, 1)$  és  $(3, 0)$ ;  $(1, 2)$  és  $(5, 0)$ .

**3.** Az energiaszintek képlete:  $h^2/8m\ell^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$  ( $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ). A legalacsonyabb energiaszintek innen  $h^2/8m\ell^2$  egységekben, az  $n_i$  számhármassokkal:  $(1, 1, 1) \rightarrow 3$ ;  $(1, 1, 2) \rightarrow 6$ ;  $(1, 2, 2) \rightarrow 9$ ;  $(1, 1, 3) \rightarrow 11$ ;  $(2, 2, 2) \rightarrow 12$ ;  $(1, 2, 3) \rightarrow 14$ ;  $(2, 2, 3) \rightarrow 17$ ;  $(1, 1, 4) \rightarrow 18$ ;  $(1, 3, 3) \rightarrow 19$ ;  $(1, 2, 4) \rightarrow 21$ .

**4.** A Pauli-elv miatt a legalacsonyabb energiaszintre két elektron kerülhet, a harmadiknak a következőre kell kerülnie. Az alapállapotú energia tehát  $(3+3+6)h^2/8m\ell^2 = 3h^2/2m\ell^2$  (az energiaszinteket l. az előző feladatban).

**5.** A legkisebb gerjesztés az, ha az egyik elektront az alapállapotból a következő állapotra emeljük; ez  $3h^2/8m\ell^2$  energiát igényel (l. a 3. feladatban).

**6.** Legyenek a hasáb élei  $\ell/2$ ,  $\ell/2$  és  $4\ell$ ; az energiaszintek képlete  $E(n_1, n_2, n_3) = h^2/8m\ell^2(4n_1^2 + 4n_2^2 + n_3^2/16)$  ( $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ). A Pauli-elv miatt a 10 elektron alapállapotban a legalsó 5 energiaszintet tölti be. Ezek ( $h^2/8m\ell^2$  egységben):  $E(1, 1, 1) = 8 + 1/16$ ,  $E(1, 1, 2) = 8 + 4/16$ ,  $E(1, 1, 3) = 8 + 9/16$ ,  $E(1, 1, 4) = 9$ ,  $E(1, 1, 5) = 9 + 9/16$ , a 10 elektron összes energiája:  $E_0 = 86,875$ . A kocka élhossza a térfogat állandósága miatt  $\ell$  lesz, a legalsó energiaszintek:  $E(1, 1, 1) = 3$ ,  $E(1, 1, 2) = E(1, 2, 1) = E(2, 1, 1) = 6$ ,  $E(1, 2, 2) = 9$ , az elektronok összenergiája ekkor  $E_1 = 60$ , ami kevesebb, mint a kezdeti energia. A deformáció során tehát energia szabadul fel.

**7.** Az elektron jellegzetes energiaskálája  $\epsilon = h^2/8ma^2 = 3,267 \cdot 10^{-20}$  J, az egyes átmenetek során felvett, ill. leadott foton energiája ekkor  $\epsilon(n^2 - m^2)$  ( $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ). A látható fény fotonjainak energiatarományja  $[2,55 \cdot 10^{-19}$  J;  $5,23 \cdot 10^{-19}$  J], innen a kvantumszámokból képzett  $n^2 - m^2$  kifejezés lehetséges értéktartományja  $[7,81; 16,01]$ , azaz  $8 \leq n^2 - m^2 \leq 16$ . Egy megfelelő  $m < n$  párhoz a gerjesztő foton energiája  $\epsilon(n^2 - 1)$  lesz, ezért a minimális gerjesztő fotonenergiához  $n$  minimumát kell megtalálni. A megfelelő megoldás:  $n = 3$ ,  $m = 1$ ; azaz a gerjesztő foton az alapállapotú molekulákat a 2. gerjesztett állapotba juttatja, ahonnan az ugyanilyen fotonok kibocsátásával visszatér az alapállapotba. A bejövő foton frekvenciája  $f = 8\epsilon/h = 3,94 \cdot 10^{14}$  Hz, ugyanennyi lesz a kijövő foton frekvenciája is: ez a mélyvörös színnek felel meg.

## C.5.2. Bohr-modell

**1.** Bármilyen olyan energiájú foton kibocsátható, amely két, 1 és 5 közötti főkvantumszámú állapot közötti átmenetnek felel meg. Ilyen átmenet  $\binom{5}{2} = 10$  van; könnyen meggondolhatóan minden átmenethez más-más energiakülönbség tartozik. Az emissziós színekben 10 vonal fog tehát megjelenni. A hidrogén színeképvonalai közül azok láthatók, amelyek az elektron  $n = 2$  főkvantumszámra való lejutásához tartoznak (Balmer-sorozat). Ilyen színeképvonalból 3 van (a 3, 4, 5 főkvantumszámról indulhat).

**2.** A főkvantumszám a két állapotban  $n = 11$  és  $m = 7$ ; a foton energiája  $E = E^* \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 2,64 \cdot 10^{-20}$  J, hullámhossza  $\lambda = hc/E = 7,50 \mu\text{m}$ .

**3.** Az elektron pályasugara (5.3) szerint arányos  $n^2$ -tel. Az alapállapotú atomsugárnál ( $n = 1$ ) tehát az  $n = 2$  állapotban négyszer, az  $n = 3$  állapotban kilencszer nagyobb a pálya sugara. (A mellékkvantumszám az atompálya méretét nem befolyá-

solja, ezért azzal nem kell foglalkoznunk – nem is tudnánk.)

4.  $r_{60} = 60^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = 1,91 \cdot 10^{-7}$  m, ami az alapállapotú molekulák mérettartományánál is jóval nagyobb. Ilyen, gyakorlatilag ionizált állapotok ott jelennek meg, ahol a  $kT$  nagyságrendű termikus gerjesztés összemérhető lesz a hidrogénatom  $E^*$  ionizációs energiájával. Ez a környezet hőmérsékletére  $10^5$  K nagyságrendű értéket ad: ilyen hőmérsékletek a természetben csillagok (pl. a Nap) konvekciós zónájában figyelhetők meg.

5. (a) Azok az átmenetek, amelyek az abszorpciós vonalakat okozzák, fordítva is lejátszódnak, ezért az atomi rendszer ezeken a frekvenciákon emittál is.

(b) Hideg környezetben (ahol az atomok döntő része alapállapotban van), abszorpciós színképvonalakként csak azok jelentkeznek, amelyekhez az atom az alapállapotból gerjesztődik valahová. Emissziós színképvonalaként viszont azok is megjelenhetnek, amikor az atom az egyik gerjesztett színtről egy másikra gerjesztődik le. Ezek energiája viszont megkapható, mint két abszorbeálható foton energiakülönbsége (ezek ugyanis tulajdonképpen a gerjesztett állapotok energiaszintjei az alapállapothoz viszonyítva); az  $\epsilon = hf$  arányosság miatt ugyanez áll a frekvenciákra is. További három emissziós színképvonal frekvenciája tehát  $5 \cdot 10^{14}$  Hz,  $8 \cdot 10^{14}$  Hz,  $1,3 \cdot 10^{15}$  Hz.

6. (5.4). szerint az alapállapot energiája a végtelen távoli ponthoz képest  $E = -\frac{m}{2} \frac{k^2 Z^2 e^4}{\hbar^2}$ , az ehhez az energiakülönbséghez tartozó foton hullámhossza  $\lambda = -hc/E$ . Ilyen hullámhosszúságú foton kerül kibocsátásra a szabad elektron állapota és az alapállapot közti átmenet során. A hullámhossz kifejezése:  $\lambda = \frac{2\hbar^2 c}{mk^2 Z^2 e^4}$ , innen a rendszám  $Z = \sqrt{\frac{2\hbar^2 c}{mk^2 e^4 \lambda}} = 20,8 \approx 21$ , a keresett elem tehát valószínűleg a szkandium (Sc). (Ebben az atomban viszont az atommagon kívül elektronok is találhatóak, így a használt energiaképlet nem teljesen pontos, ez lehet felelős az eltérésért.)

7. (a) Legyen a pozitroniumatom sugara  $r'$ . Mivel az atom tömegközéppontja a két részecskét összekötő szakasz felezőpontjában van, attól mindkét részecske ilyen távolságra van, és szimmetriaokokból sebességük azonos,  $v'$  nagyságú. Az egyes részecskék lendülete  $mv'$ , a teljes perdület tehát  $2mv'r'$ , ez egyenlő  $n\hbar$ -sal:  $mv'r' = n\hbar/2$ . A körpálya dinamikai feltétele:  $m \frac{v'^2}{r'} = \frac{ke^2}{4r'^2}$ , innen  $ke^2 = 4mv'^2 r' = 2n\hbar v'$ , azaz  $v' = \frac{ke^2}{2n\hbar}$ . Innen  $r' = n\hbar/2mv' = n^2 \frac{\hbar^2}{mke^2}$ , ami megegyezik a hidrogénatom megfelelő adatával. Az alapállapotú pozitroniumatom sugara tehát megegyezik az alapállapotú hidrogénatom sugarával:  $r_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m.

(b) Az energia a viriáltétel szerint a teljes kinetikus energia ellentettje:  $E' = -2 \cdot \frac{mv'^2}{2} = -mv'^2 = -\frac{mk^2 e^4}{4n^2 \hbar^2}$ , ami a hidrogénatom (5.4) szerinti energiájának fele; a pozitroniumatom ionizációs energiája  $\epsilon = \frac{mk^2 e^4}{4\hbar^2} = 1,09 \cdot 10^{-18}$  J.

(c) A pozitronium energiaszintjei közti átmenetéhez tartozó foton energiája a fentiek szerint  $\epsilon \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ , ennek kell a látható fotonok energiatartományába,  $2,55 \cdot 10^{-19}$  J és  $5,23 \cdot 10^{-19}$  közé esnie. Ez akkor teljesül, ha  $0,234 \leq \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \leq 0,480$ . Ha  $n \geq 3$ , a legnagyobb elérhető különbség  $\frac{1}{9}$ , ami túl kevés, így  $n = 1$  vagy  $n = 2$ . Ha  $n = 1$ , a feltétel:  $0,520 \leq \frac{1}{m^2} \leq 0,766$ ; ilyen  $m$  egész viszont nem létezik. Ha  $n = 2$ , a feltétel:  $-0,230 \leq \frac{1}{m^2} \leq 0,016 \rightarrow m \geq 7,89$ . A látható színképvonalak tehát az  $m \geq 8$  főkvantumszám és az  $n = 2$  főkvantumszám közti átmenetekhez tartoznak. Ezek energiája közel esik a látható spektrum kisebb végéhez, így mind vörös színűek.

(d) A pozitroniumra, mint a hidrogén 0 tömegszámú izotópjára tekinthetünk. Emiatt

a pozitronium-klorid szerkezete ugyanolyan lesz, mint a hidrogén-kloridé, amelyben a két elem egy-egy atomja alkot vegyületet egymással. A pozitronium-kloridban (PsCl) tehát a pozitronium és a klór aránya 1:1.

A pozitronium-klorid molekulavegyület, amelyet kovalens kötés tart össze. Ez a kötés (a hidrogén-klorid példájából kiindulva) erősen poláros, azaz a kötetést létesítő két elektron nagyobb valószínűséggel tartózkodik a klór atomtörzse közelében, mint a pozitron környezetében. A pozitron tehát kisebb valószínűséggel találkozik elektronnal a vegyületben, így csak hosszabb idő elteltével annihilálódik. A kötött pozitroniumatom tehát hosszabb életű.

**8.** (a) Ugyanúgy is eljárhatnánk, mint az előbb, viszont inkább egy másik utat mutatunk. Egymás potenciálterében mozgó testek mozgásának leírására használhatjuk a *redukált tömeget*: ha az egyik testet rögzítenénk, a másik tömegét pedig  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ -re változtatnánk, a mozgásegyenletek nem változnak meg, ezért a testek távolsága, relatív sebessége és a rendszer energiája azonos a két esetben. Ha tehát a hidrogénatomot leíró egyenletekbe beírjuk a  $\mu = \frac{m_p m_\mu}{m_p + m_\mu}$  redukált tömeget az elektron tömege helyére, helyesen kapjuk meg a müonium paramétereit. A kötési energia (5.4) szerint  $\epsilon = \frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} = 4,05 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 2,52 \text{ keV}$ .

(b) A két részecske távolsága  $d = \frac{\hbar^2}{\mu k e^2} = 2,85 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ; az atom méretét viszont a kisebb tömegű müon pályasugara adja, ami a tömegközéppont tulajdonságai miatt  $r = d \frac{m_p}{m_p + m_\mu} = 2,56 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ .

(c)  $E = \epsilon \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\epsilon = 3,04 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 1,90 \text{ keV}$ .

**9.** (a) Legyen az elektron pályasugara  $r$ ; ekkor a pályamenti sebesség (részletesen l. 9.4.1)  $v = eBr/m$ , az elektron perdülete tehát  $mvr = eBr^2 = n\hbar$ , innen  $r = \sqrt{n\hbar/eB}$ .

(b)  $v = eBr/m = \sqrt{neB\hbar}/m$ .

(c) Az elektronnak a mozgási energián kívül mágneses energiája is van. Ezt a körpályán keringő elektront köráramként felfogva lehet kiszámítani. Az elektron szögsebessége  $\omega = v/r = eB/m$ , így a körpálya megtételéhez szükséges idő  $t = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ . A körpálya egy keresztmetszetén ennyi idő alatt éppen  $e$  töltés megy át, így az áramerősség  $I = e/t = e^2 B/2\pi m$ . A köráram területe  $A = r^2\pi = n\hbar\pi/eB$ , mágneses nyomatéka tehát  $p = IA = n\hbar e/2m$ , amely meggondolhatóan ellentétes irányú  $B$ -vel. A mágneses energia ilyen esetben  $E_m = pB = n\hbar eB/2m = mv^2/2$ , azaz éppen megegyezik a mozgási energiával. Az  $n$ . energiaszinten az elektron energiája tehát  $E = mv^2/2 + E_m = mv^2 = n\hbar eB/m$ .

*Másképp*: a mágneses térben  $\omega$  szögsebességgel keringő elektront tekinthetjük egy  $f = \omega/2\pi$  frekvenciájú harmonikus oszcillátornak is. Ez energiát csak  $hf$  nagyságú energiakvantumokban tárolhat, így energiája ennek egész számú többszöröse:  $E = nhf = n\hbar eB/2\pi m = n\hbar eB/m$ . (Ez a megoldás nem magyarázza meg az energiaszintek konkrét értékét, viszont elméleti szempontból helytálló.)

(d) Mivel az elektron lehetséges energiája  $\hbar eB/m$  egész számú többszöröse, a lehetséges gerjesztések is ilyen energiájúak. A gerjesztő foton energiája tehát  $\epsilon = n\hbar eB/m$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ), így frekvenciája  $f = \epsilon/h = neB/2\pi m$ .

## C.6. Egyes magfizika-feladatok megoldása

A 6.–9. fejezetek feladatainak nagy része 1998 és 2004 között kitűzésre került a Szilárd Leó Országos Fizikaversenyen (erre a feladatok mellett zárójelben levő számok utalnak). Ezek részletes megoldása megtalálható az *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 1998–2004* c. könyvben (Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány, Paks, 2005); a versenyen nem kitűzött feladatok megoldásai következnek.

$$\mathbf{6.1.4/1.} \quad \epsilon = E/2 = (m_n + m_p - m_D)c^2/2 = 1,798 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,12 \text{ MeV}.$$

$$\mathbf{6.1.4/2.} \quad \epsilon = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{mag}})c^2/A, \text{ az egyes esetekben:}$$

$${}^4\text{He: } 1,133 \text{ pJ} = 7,07 \text{ MeV};$$

$${}^7\text{Li: } 8,97 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 5,60 \text{ MeV};$$

$${}^9\text{Be: } 1,035 \text{ pJ} = 6,46 \text{ MeV}.$$

$$\mathbf{6.1.4/3.} \quad \text{A fenti képletet átrendezve: } m_O = 8m_p + 8m_n - 16\epsilon/c^2 = 26,55273 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

**7.2.3/14.** Vizsgáljunk  $N$  atommagot egy  $t \ll T_{1/2}$  időtartamon. Ez alatt minden mag  $p(t) \ll 1$  valószínűséggel bomlik el, egymástól függetlenül. A binomiális eloszlás várható értéke ismert módon  $Np(t)$ , várhatóan ennyi mag fog elbomlani. Másrészt, ez az érték  $At = N\lambda t$ -vel egyenlő, innen  $p(t) = \lambda t$ . A binomiális eloszlás szórásnégyzete  $Np(t)(1 - p(t))$ , ami, mivel  $p(t) \ll 1$ ,  $Np(t) = At$ -vel egyezik meg. Az adott idő alatt elbomló magok számának szórása tehát éppen a várható érték gyöke.

A fentiek szerint az adott idő alatt elbomló magok számának eloszlása egy olyan binomiális eloszlással egyezik meg, amelynek  $p$  paramétere a 0-hoz tart: ezt az eloszlást nevezzük *Poisson-eloszlásnak*, amelynek szórása valóban várható értékének gyöke (ennek radioaktív méréseknél van jelentősége).

A  $\lambda$  paraméter fizikai jelentése a  $p(t)$ -re kapott összefüggésből olvasható ki: annak a valószínűsége, hogy egy atommag rövid  $dt$  idő alatt elbomlik, éppen  $\lambda dt$ .

**7.2.3/15.** A mérés előtt háttérrel kell mérni. Ehhez a GM-csővet ugyanúgy kell beállítani, mint ahogy utána a mintát helyezük az ablak elé, majd a minta nélkül többször egy percet mérni, ezek átlagát tekintjük háttérnek, amelynek hibájaként a Poisson-eloszlás miatt annak gyökét vesszük. (Célszerű ezt még akkor megtenni, amikor a porszívó jár.)

Ezután a mintát is odatesszük az ablak elé és elkezdjük a mérést; a mért adatok hibája azok gyöke. Feldolgozni viszont a mért érték és a háttér különbségét lehet, amelynek hibája a két hiba összege (vagy Gauß-féle hibaterjedés használatával a két hiba négyzetösszegének a gyöke). Ha nincs időnk vagy eszközünk elvégezni a mérést, a következő adatsort használhatjuk.

Háttér: 27 beütés/perc;

$t$ (perc)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n$ (1/perc)	144	136	132	11	113	123	135	111	117	130	132
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	121	117	89	128	98	107	106	103	105	115	99
	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
	100	82	101	81	78	90	72	100	84	86	77
											80

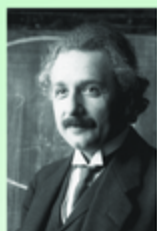
Ha ezt ábrázoljuk, az adatok (a háttér levonása után) óriási fluktuációt mutatnak, így azok tulajdonképpen feldolgozhatatlanok. Emiatt célszerű az adatokat 5 perces



intervallumokra mozgóátlagolni, azaz minden 5 perc hosszú intervallumra venni az adatok átlagát és azt a középső időponthoz rendelni. A radioaktív bomlástörvényből  $n(t) = n_0 2^{-t/T}$  adódik a beütésszám időfüggésére, emiatt  $\lg n(t)$  lineáris lesz  $t$ -ben, az egyenes meredeksége  $m = -\lg 2/T$  lesz. Az ábrázolt adatok közelítőleg tényleg egy egyenesre illeszkednek, amelynek meredeksége  $m = (-9,16 \pm 0,44) \cdot 10^{-3}$  1/perc, innen  $T = -\lg 2/m = (32,9 \pm 1,6)$  perc. (Ez egy effektív felezési idő, amely több bomló anyag együttes hatásából adódik, így más mérésekkel más, de nagyságrendileg megegyező adatok kaphatók.)



Max Planck



Albert Einstein



Phillip Lenard



Arthur Compton



L-V de Broglie



E. Schrödinger



W. Heisenberg



Conrad Röntgen



Hevesy György



Szilárd Leó



Wigner Jenő



Teller Ede



Neumann János



Marx György



Henri Becquerel



E. Rutherford



J. J. Thomson



Marie Curie



Niels Bohr



James Chadwick



Enrico Fermi



Otto Hahn