Országos Szilárd Leó Fizikaverseny
2026 Döntő
Elméleti feladatok megoldásai

Papp Gergely & Tarján Péter

Max Planck Plazmafizika Intézet (München) & Nyíregyházi Egyetem
gergely.papp@ipp.mpg.de; tarjan.peter@nye.hu

2026-04-19

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

MATFIN Alapítvány Powered by Frontiers

Becsüljük meg, hogy mekkora a Föld felszínére merőlegesen beeső 1000 W/m^2 teljesítményű napsugárzás 1 köbméterében lévő fotonok és az 1 m^3 levegőben található molekulák számának aránya! Számoljunk normálállapotú levegővel: $T = 0\,°\mathrm{C}$, $p = 10^5$ Pa, a fotonok átlagos hullámhosszát vegyük 500 nm-nek.

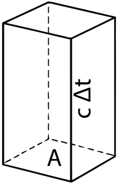
N darab foton összes energiája $E = N\varepsilon = Nhc/\lambda$.

Összes energiát viszont úgy is számíthatunk, hogy $E = P\Delta t$.

$$E = N\varepsilon = \frac{Nhc}{\lambda} = P\Delta t \implies N = \frac{P\Delta t}{\varepsilon} = \frac{P\Delta t\lambda}{hc}.$$

Nekünk a fotonok részecskesűrűségére van szükségünk, ami

$$n_\mathrm{f} = \frac{N}{V} = \frac{P\Delta t\lambda}{hcV}.$$



A $P/A = E/(\Delta t A)$ felületegységre eső sugárzási teljesítmény az A felületre Δt idő alatt beeső fotonokból származik. Ha az A alapterületet négyzetként képzeljük el, akkor azok a fotonok érkeznek be egy tetszőleges időponthoz képest Δt időablakon belül, amelyek $c\Delta t$ távolságnál közelebb vannak, azaz az A alapterületű, $c\Delta t$ magasságú hasábon belül tartózkodnak. Ennek a hasábnak a térfogata $V = Ac\Delta t$.

Bővítsük az előzőleg kapott tört számlálóját és nevezőjét $1/A$-val!

$$n_\mathrm{f} = \frac{\frac{P}{A}\Delta t\lambda}{hc\frac{V}{A}} = \frac{\frac{P}{A}\Delta t\lambda}{hc\cdot c\Delta t} = \frac{\frac{P}{A}\lambda}{hc^2} = \frac{1000\ \mathrm{J/(s\cdot m^2)}\cdot 500{\cdot}10^{-9}\ \mathrm{m}}{6{,}626{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot(3{\cdot}10^{8}\ \mathrm{m/s})^2} \approx 8{,}4{\cdot}10^{12}\ \frac{1}{\mathrm{m}^3}.$$

A levegő molekulasűrűségét az ideális gáz $pV = NkT$ állapotegyenletéből fejezhetjük ki:

$$n_\mathrm{m} = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT} = \frac{10^5\ \mathrm{Pa}}{1{,}38{\cdot}10^{-23}\ \mathrm{J/K}\cdot 273{,}15\ \mathrm{K}} \approx 2{,}7{\cdot}10^{25}\ \frac{1}{\mathrm{m}^3}.$$

A molekulasűrűség és a fotonsűrűség aránya:

$$\frac{n_\mathrm{m}}{n_\mathrm{f}} \approx \frac{2{,}7{\cdot}10^{25}}{8{,}4{\cdot}10^{12}} \approx 3{,}2{\cdot}10^{12}.$$

$$\boxed{\langle P(1)\rangle = 4{,}4 \pm 1{,}3}$$

Indokoljuk meg, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy hamisak:

a) Egy hangforrástól távolodva (vagy közeledve) ugyanazt a frekvenciaváltozást észleljük, mintha a hangforrás ugyanazzal a sebességgel távolodna (vagy közeledne) tőlünk.

b) Egy fényforrástól távolodva (vagy közeledve) ugyanazt a frekvenciaváltozást észleljük, mintha a fényforrás ugyanazzal a sebességgel távolodna (vagy közeledne) tőlünk.

a) **HAMIS.** A hangtani Doppler-effektusnál számít, hogy a megfigyelő vagy a forrás mozog, és merre, mert a hang valamilyen közegben terjed. Ezért nem csak a forrás és megfigyelő relatív sebessége számít, hanem a közeghez viszonyított sebességük és irányuk ($\pm$) is:

$$\frac{f_\mathrm{M}}{f_\mathrm{F}} = \left(\frac{v_\mathrm{H} \pm v_\mathrm{M}}{v_\mathrm{H} \pm v_\mathrm{F}}\right).$$

b) **IGAZ.** A fénynél a „közegnek” ebből a szempontból nincs kitüntetett szerepe. A fény sebessége minden inerciarendszerben állandó. Nincs kitüntetett inerciarendszer, csak a forrás és megfigyelő egymáshoz viszonyított relatív $\beta = v/c$ sebessége számít.
A relativisztikus Doppler-effektus ezen felül figyelembe veszi az idődilatációt is.

$$\frac{f_\mathrm{M}}{f_\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \text{ ha } v \ll c \Longrightarrow \Delta f \approx f_\mathrm{F}\frac{v}{c}.$$

$$\boxed{\langle P(2)\rangle = 3{,}5 \pm 1{,}8}$$

1986. április 26-án, 40 éve történt a csernobili atomerőmű baleset. Az európai országok légkörét jelentős radioaktív szennyeződés érte. A mérések szerint a magyarországi légköri szennyeződés nagysága a ^{131}I izotópból $A = 10^{15}$ Bq-re becsülhető. ($T_{1/2} \approx 8$ nap, $F = 93\ 030\ \mathrm{km}^2$).

a) Becsüljük meg, hogy Magyarország légterébe hány g jódizotóp juthatott légáramlás útján?

b) Tételezzük fel, hogy a légköri jód esőzés következtében két hét alatt a földfelszínre került. Hány $\mathrm{Bq/m^2}$ volt Magyarországon 2 hét múlva az egységnyi felületű talaj átlagos többletaktivitása?

a) A radioaktív jód mennyisége az aktivitásból ($A = \lambda N = \ln(2) \cdot N/T$) számítható:

$$N = \frac{A \cdot T}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 10^{15}\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 8\ \mathrm{nap} \cdot 86400\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{nap}} = 0{,}997{\cdot}10^{21} \approx 10^{21}.$$

A légtérbe jutott radioaktív jód tömege így:

$$m = \frac{N}{N_A} \cdot M \approx \frac{1{\cdot}10^{21}}{6{\cdot}10^{23}} \cdot 131\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \approx 0{,}22\ \mathrm{g}.$$

b) A két hét múlva még el nem bomlott ^{131}I atomok aktivitása:

$$A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 10^{15}\ \mathrm{Bq} \cdot 2^{-\frac{14\ \mathrm{nap}}{8\ \mathrm{nap}}} \approx 0{,}297{\cdot}10^{15}\ \mathrm{Bq} \approx 0{,}3{\cdot}10^{15}\ \mathrm{Bq},$$

$$\frac{A}{F} = \frac{0{,}3{\cdot}10^{15}\ \mathrm{Bq}}{93\ 030{\cdot}10^{6}\ \mathrm{m}^2} \approx 3193\ \frac{\mathrm{Bq}}{\mathrm{m}^2} \approx 3{,}2\ \frac{\mathrm{kBq}}{\mathrm{m}^2}.$$

$$\boxed{\langle P(3)\rangle = 4{,}7 \pm 1{,}0}$$

Anikó és Bence egy mesterségesen előállított radioaktív izotóp gamma-spektrumát szeretné minél részletesebben megvizsgálni. Az izotópot kutató atomreaktorban kell előállítani, neutron-besugárzással, felezési ideje $T = 15$ perc. Engedélyt kaptak arra, hogy az előállításhoz szükséges mintát *összesen egy óráig* besugározhassák az atomreaktorban, valamint a gamma-spektrum felvételéhez szükséges félvezető detektort *összesen egy óráig* használhassák a spektrum felvételére. Bence azt javasolja, hogy a kísérletet úgy végezzék el, hogy egy óráig besugározzák a mintát, és utána egy óráig mérnek. Anikó szerint viszont négy részletben kellene kihasználniuk a kapott időt: negyedóráig besugározni, aztán negyedóráig mérni, és ezt négy különböző napon megtenni, hogy az összes reaktoridőt és detektoridőt kihasználják. Hasonlítsuk össze a két mérési módszert a gamma-spektrum mérése szempontjából! Ugyanannyi beütést mérnek? Ha igen, miért, ha nem, kinek a módszere adna több detektált részecskét? Az izotóp gyártásakor az aktivitás az alábbi függvény szerint *növekszik*: $A(t) = A_{\max} \cdot \left(1 - 2^{-t/T}\right)$, ahol T a felezési idő, és $A_{\max}$ a maximálisan elérhető aktivitás.

Bence módszerénél az elért aktivitás:

$$A_B(4T) = A_{\max} \cdot \left(1 - 2^{-4}\right) = 0{,}9375 \cdot A_{\max}.$$

A még nem detektált beütésszámok változása: $N_{\text{nem}}(t) = N_{\max} \cdot 2^{-t/T}$, hiszen ez arányos a még el nem bomlott atomok számával. Itt $N_{\max}$ a mintából egyáltalán detektálható beütésszám.

A $\tau = 1$ óra mérési idő alatt detektált beütésszám tehát:

$$N(t) = N_{\max} \cdot (1 - N_{\text{nem}}(t)) = N_{\max} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}\right).$$

A mért beütésszám hasonló szorzó szerint változik, mint az aktiválódásnál, azaz

$$N_B \propto 0{,}9375^2 \cdot A_{\max} = 0{,}8789 \cdot A_{\max}.$$

Anikó módszerével az aktivitás minden lépésnél:

$$A_A(T) = A_{\max} \cdot \left(1 - 2^{-1}\right) = 0{,}5 \cdot A_{\max},$$

és a beütésszám $N_A \propto 0{,}5^2 \cdot A_{\max} = 0{,}25 \cdot A_{\max}$.

Viszont ezt a lépést négyszer is megteszik, ezért összességében a beütésszám Anikó módszerénél négyszer ekkora lesz, azaz $N_{A,\text{össz}} \propto 4 \cdot 0{,}25 \cdot A_{\max} = 1{,}00 \cdot A_{\max}$.

Azaz Anikó módszerével kb. 12%-kal nagyobb beütésszámot érhetnek el.

→ A négy mérés más-más napon történik. Egy nap majdnem 100 felezési idővel egyenlő, ezért jó közelítéssel feltételezzük, hogy a minta teljesen elbomlott két felaktiválás között.

$$\boxed{\langle P(4)\rangle = 3{,}5 \pm 1{,}0}$$

Egy téglalap alakú molekulában, amelynek a hosszabbik oldala $a = 0{,}735$ nm hosszúságú, három elektron terül szét a molekula felületén. A harmadik elektron 620 nm hullámhosszúságú fotont tud elnyelni, miközben a következő lehetséges állapotba gerjesztődik.
Hány nanométer a molekula rövidebb oldalának b hossza?

Egy téglalap alakú felületen kialakuló elektron-állóhullámok energiája a következő:

$$E(n,k) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{(n+1)^2}{a^2} + \frac{(k+1)^2}{b^2}\right),$$

ahol n, k az oldalak mentén kialakuló belső csomók száma. (Lásd pl. Simon-Szabó jegyzet.)

Gerjesztéskor a legmagasabb energiájú állapotban tartózkodó elektron változtatja meg az állapotát. Mivel az első két „delokalizált” elektron $(0,0)$ „csomómentes” állapotba kerül, a harmadik elektronnak a Pauli-elv miatt az egyik egycsomós állapotba kell kerülnie. Ezek közül a legalacsonyabb energiájú az az állapot lesz, amelynél az oldalhossz a nagyobb; legyen ez az $(1,0)$ állapot. A legalacsonyabb gerjesztés ekkor a $(0,1)$ állapotba történő gerjesztés.

Az elnyelés szempontjából csak az energiák különbsége az érdekes, ezért az első két elektron energiája kiesik a különbség képzésekor, és kapjuk, hogy:

$$\Delta E = E(0,1) - E(1,0) = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{1^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} - \left(\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2}\right)\right] = \frac{3h^2}{8m}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Az elnyelés szempontjából csak az energiák különbsége az érdekes, ezért az első két elektron energiája kiesik a különbség képzésekor, és kapjuk, hogy:

$$\Delta E = E(0,1) - E(1,0) = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{1^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} - \left(\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2}\right)\right] = \frac{3h^2}{8m}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

A molekula akkor tud elnyelni egy fotont, ha $\Delta E = hc/\lambda$, ahonnan

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8mc}{3h\lambda}.$$

Behelyettesítve a számértékeket, kapjuk a rövidebb oldal b hosszát:

$$\frac{1}{b^2} \approx \frac{1}{(0{,}735\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})^2} + \frac{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{3\cdot 6{,}626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 620\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} \approx 1{,}85\cdot 10^{18}\ \frac{1}{\mathrm{m}^2} + 1{,}77\cdot 10^{18}\ \frac{1}{\mathrm{m}^2},$$

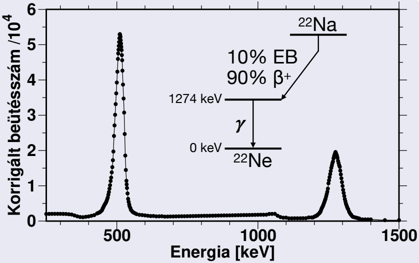
$$\frac{1}{b^2} \approx 3{,}62\cdot 10^{18}\ \frac{1}{\mathrm{m}^2} \implies b \approx 0{,}525\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} = 0{,}525\ \mathrm{nm}.$$

$$\boxed{\langle P(5)\rangle = 1{,}4 \pm 1{,}4}$$

A ^{22}Na nuklid bomlása a mellékelt séma alapján történik. A γ-spektrumában két jól megkülönböztethető energiájú γ-csúcs látszik. A detektálási hatásfokkorrekciók után a csúcsok alatti területek várható aránya 1,8 : 1.

a) Milyen energiájú gamma-fotonoknak felelhet meg ez a két csúcs?

b) Miért várható 1,8 : 1 területarány, és melyik csúcs területe lesz a nagyobb?



a) Az egyik csúcs az 1274 keV energiájú γ-fotonok csúcsa.
A γ-bomlást megelőzően 90% valószínűséggel β^+ bomlás, 10% valószínűséggel elektronbefogás (Electron Capture, EC) történt. A β^+ bomlásban keletkezett pozitronok a sugárforrás atomjainak valamelyik elektronjával annihilálnak, és ebben a folyamatban két 511 keV energiájú γ-foton keletkezik. Ezekből származik a másik csúcs.

b) A bomlási séma alapján: ha az 1274 keV-es fotonok számát 100%-nak tekintjük, akkor 90%-nyi β^+ bomlás (annihiláció) történik*. A 10%-nyi elektronbefogásból nem keletkezik pozitron.
Ezért minden 1274 keV-es fotonra $2 \cdot 0{,}9 = 1{,}8$-szor annyi 511 keV-es annihilációs foton várható*. A detektorok hatásfoka tipikusan különböző a két energiára, de ha ezzel korrigálunk, akkor már megkapjuk az 1,8 : 1 arányt.

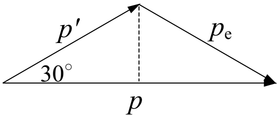
$$\boxed{\langle P(6)\rangle = 2{,}8 \pm 1{,}5}$$

Egy röntgenfoton $\vartheta = 30°$–os szöggel szóródik egy szabad és állónak tekinthető elektronon. A meglökött elektron de Broglie-hullámhossza megegyezik a szórt foton hullámhosszával.

a) Mekkora volt a beérkező foton hullámhossza? (→ Lendület-megmaradás vektor-ábra!)
b) Energiájának hány százalékát adja át a foton a helyéről kilökött elektronnak?
c) A nyugalmi energiája hányszorosával nő meg a mozgó elektron mozgási energiája?

a) A lendület és a (de Broglie-) hullámhossz közötti összefüggés: $p = h/\lambda$ mind a foton, mind az elektron esetében. Mivel a feladat szerint a szórt foton és az elektron hullámhosszai megegyeznek, ezért a lendületük is azonos nagyságú.
A lendületmegmaradás miatt a beeső foton p, a szórt foton p', és a meglökött elektron p_e lendületvektorai háromszöget alkotnak. Az előzőek miatt ez a háromszög egyenlő szárú:

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{p}{2}}{p'} \implies p' = \frac{p}{2\cos\vartheta} = \frac{p}{\sqrt{3}}.$$



A beeső-, illetve a szórt foton lendülete: $\lambda = h/p$, illetve $\lambda' = h/p'$, ezért $\lambda' = \sqrt{3}\lambda$.
A Compton-szórásra vonatkozó $\Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\vartheta)$ összefüggést kihasználva (ahol $\lambda_\mathrm{C} = h/(m_\mathrm{e}c) \approx 2{,}426\cdot10^{-12}$ m a Compton-hullámhossz):

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1-\cos\vartheta)$$

a) A Compton-szórásra vonatkozó összefüggést kihasználva:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos\vartheta),$$

$$\sqrt{3}\lambda - \lambda = \lambda_C \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\lambda = \lambda_C \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} \approx 0{,}183 \cdot 2{,}426{\cdot}10^{-12} \approx 4{,}440{\cdot}10^{-13}\ \mathrm{m}.$$

b) A beérkező és a szórt foton energiája:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \approx 4{,}474{\cdot}10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 2{,}792\ \mathrm{MeV},$$

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} \approx 2{,}583{\cdot}10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 1{,}612\ \mathrm{MeV}.$$

Az elektron a beeső és a szórt foton energiájának különbségét kapja meg:

$$E_\mathrm{e} = E - E' \approx 1{,}891{\cdot}10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 1{,}180\ \mathrm{MeV}.$$

Az elektronnak átadott energiahányad:

$$q = \frac{E_\mathrm{e}}{E} \approx 0{,}423, \text{ azaz } 42{,}3\%.$$

b) Mivel a foton energiája és lendülete között egyenes arányosság van ($E = pc$), ezért ezt természetesen közvetlenül, az energiák meghatározása nélkül is ki lehet számítani:

$$q = \frac{E_e}{E} = \frac{E - E'}{E} = \frac{E\left(1 - 1/\sqrt{3}\right)}{E} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ vagy:}$$

$$q = \frac{E_e}{E} = \frac{E - E'}{E} = \frac{pc - p'c}{pc} = \frac{p - p'}{p} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 42{,}3\%.$$

c) Az elektron mozgási energiája a fentebb kiszámított $E_e = 1{,}180$ MeV.
Az ebből származó energianövekmény nyugalmi energia egységekben:

$$\frac{E_e}{mc^2} = \frac{1{,}180 \text{ MeV}}{0{,}511 \text{ MeV}} \approx 2{,}31.$$

$$\boxed{\langle P(7) \rangle = 2{,}9 \pm 1{,}7}$$

Egy amerikai oktató laboratóriumban használt, tiszta alfa-bomló ^{210}Po izotópból álló minta aktivitása a gyártáskor 1 μCi (1 mikrocurie) volt. Egy diák a mintát egy kézi Geiger-Müller számlálóval mérve percenként 1200 beütést mér. A mintát az adatlapja szerint 120 nappal korábban gyártották, felezési ideje $T_{1/2} \approx 138{,}4$ nap.

a) A bomlások mekkora százalékát érzékeli a mérés?

b) Soroljunk fel legalább két indokot, hogy miért nem érzékeljük az összes bomlást!

a) 1 Ci $= 3{,}7{\cdot}10^{10}$ Bq (függvénytáblázat). A minta eredeti aktivitása tehát $3{,}7{\cdot}10^{4}$ Bq. Ha a mintát 120 nappal korábban gyártották, úgy a mostani várható aktivitása

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} = 3{,}7{\cdot}10^4\ \mathrm{Bq} \cdot 2^{-120/138{,}4} \approx 3{,}7{\cdot}10^4\ \mathrm{Bq} \cdot 0{,}548 \approx 2{\cdot}10^4\ \mathrm{Bq}.$$

A mért aktivitás 1200 beütés percenként, másodpercenként $1200/60 = 20$, ami 20 Bq. A kettő aránya $\approx 20/2{\cdot}10^4 = 1{\cdot}10^{-3} = 0{,}1\%$.

b) A detektor a bomlásoknak csak igen kis hányadát érzékeli. Ennek több oka van:

i) A kibocsátott sugárzásnak csak egy része esik a detektor irányába.

ii) A beérkező sugárzásnak csak egy része ad jelet a detektorban.

iii) A mintából nem csak alfa-sugárzás léphet ki, de az dominál. Az alfa-sugárzás áthatolóképessége nagyon alacsony. A sugárzás nagy része érzékelés előtt elnyelődik már magában a mintában, a tokozásban, a levegőben, a detektorban, stb. A tisztán alfa-bomló izotópokat speciális méréstechnikával kell mérni. A Geiger-Müller számláló nem ideális hozzá. (→ Szimulációs feladat!)

$$\boxed{\langle P(J8)\rangle = 4{,}7 \pm 0{,}5}$$

Egy 70 kg-os ember testének radioaktivitása ≈ 8 kBq, amelynek kb. fele (4 kBq) a testben található ^{40}K bomlásából származik. A ^{40}K 89,3% valószínűséggel negatív béta-bomló, és a bomlásakor 1311 keV energia szabadul fel. Tegyük fel, hogy a béta-bomlások a testben egyenletesen mindenhol történnek, és a béta-részecskék a testben teljesen elnyelődnek.

a) Becsüljük meg, mekkora éves elnyelt dózist kap az ember a ^{40}K béta-sugárzásából, ha a béta-részecskék átlagos energiája $E_\beta = 560$ keV!

b) Miért jelentősen kisebb a béta-részecske átlagos energiája a bomlásban felszabaduló teljes energiánál? Milyen hatással van ez a dózisra?

a) A ^{40}K negatív béta-bomlásaiban keletkezett elektronok száma a testben:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 0{,}893 \cdot 4000\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 3572\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A $\tau = 1$ év alatt ezek által a testben leadott energia:

$$\Delta E = \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot E_\beta \cdot \tau = \left(\frac{3572}{\mathrm{s}}\right) \cdot \left(5{,}6{\cdot}10^{5} \cdot 1{,}6{\cdot}10^{-19}\ \frac{\mathrm{eV} \cdot \mathrm{J}}{\mathrm{eV}}\right) \cdot (86400 \cdot 365{,}24\ \mathrm{s}) \approx 0{,}01\ \mathrm{J}.$$

Az elnyelt dózis a testszövet-kilogrammonként a sugárzásból elnyelt energia:

$$D_\beta = \frac{\Delta E}{m} = \frac{0{,}010\ \mathrm{J}}{70\ \mathrm{kg}} = 1{,}43{\cdot}10^{-4}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 0{,}143\ \mathrm{mGy}.$$

b) A béta-bomláskor felszabaduló energia (1311 keV) a keletkező béta-részecske és antineutrínó között oszlik meg.
A megmaradási törvények lehetővé teszik, hogy a béta-részecske energiája 0 és 1311 keV között bármekkora legyen. Az átlagos energia a mérések szerint kb. 560 keV.
Mivel az antineutrínó kölcsönhatás nélkül elhagyja a testet, dózisterhelést nem okoz.
A dózishoz csak a testben leadott energia járul hozzá.

$$\boxed{\langle P(J9)\rangle = 4{,}2 \pm 1{,}5}$$

Junior 10. feladat (1/2) kitűzte: Radnóti Katalin

Egy 2500 K felszíni hőmérsékletű vörös törpecsillag R_{cs} sugara a Nap sugarának tizede, tömege a Nap tömegének 8%-a. A csillag körül keringő exobolygó pályáját tekintsük körnek, az exobolygó alakját pedig gömbnek. Tételezzük fel, hogy az exobolygó felszínén a hőmérséklet mindenhol ugyanakkora.

a) A csillagtól milyen R távolságban kellene keringenie egy exobolygónak ahhoz, hogy 15 °C legyen a hőmérséklete? (Tegyük fel, hogy az exobolygót csak a csillag sugárzása fűti, más hatás – üvegházhatás vagy a bolygó mélyének hője – a hőmérsékletet nem befolyásolja.)

b) Hány nap lenne ennek az exobolygónak a keringési ideje?

$R_{\mathrm{Nap}} = 7{\cdot}10^{8}$ m, $M_{\mathrm{Nap}} = 2{\cdot}10^{30}$ kg, $\gamma = 6{,}674{\cdot}10^{-11}$ m^3/(kg $\cdot$ s^2), $\sigma = 5{,}67{\cdot}10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).

a) $T_{\mathrm{cs}} = 2500$ K, $M_{\mathrm{cs}} = 1{,}6{\cdot}10^{29}$ kg, $R_{\mathrm{cs}} = 7{\cdot}10^{7}$ m, $T_{\mathrm{cs}} \approx 288$ K. A bolygó felszíni hőmérséklete akkor állandó, ha a csillag hőmérsékleti sugárzásából elnyelt teljesítmény és a bolygó által kisugárzott teljesítmény megegyezik. Az elnyelés a bolygó felszínének a csillag irányába eső vetületén (egy főkörének $R_{\mathrm{b}}^2\pi$ területén) történik, míg a kisugárzás a teljes $4R_{\mathrm{b}}^2\pi$ gömbfelületen egyenletesen. (Ehhez kell feltételeznünk, hogy a bolygó felszíni hőmérséklete mindenhol ugyanakkora.)

$$P_{\mathrm{be}} = P_{\mathrm{ki}},$$

$$\sigma T_{\mathrm{cs}}^2 \cdot \frac{R_{\mathrm{cs}}^2}{R^2} \cdot R_{\mathrm{b}}^2\pi = \sigma T_b^4 \cdot 4R_{\mathrm{b}}^2\pi.$$

a)

$$T_{\mathrm{cs}}^2 \cdot \frac{R_{\mathrm{cs}}^2}{R^2} \cdot \cancel{\sigma R_{\mathrm{b}}^2} \pi = T_b^4 \cdot 4 \cdot \cancel{\sigma R_{\mathrm{b}}^2} \pi .$$

Innen $\sigma R_{\mathrm{b}}^2 \pi$-el egyszerűsítve kifejezhető a bolygó R pályasugara:

$$R = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{T_{\mathrm{cs}}^4}{T_b^4} \cdot R_{\mathrm{cs}}^2} = \frac{1}{2} \frac{T_{\mathrm{cs}}^2}{T_b^2} \cdot R_{\mathrm{cs}} = \frac{1}{2} \frac{(2500\ \mathrm{K})^2}{(288{,}15\ \mathrm{K})^2} \cdot 0{,}1 \cdot 7{\cdot}10^8\ \mathrm{m} \approx 2{,}634{\cdot}10^9\ \mathrm{m}.$$

(Ez a Föld pályasugarának kb. 57-ed része.)

b) Az m tömegű bolygó mozgásegyenletéből kapjuk a T keringési időt:

$$\gamma \frac{m M_{\mathrm{cs}}}{R^2} = mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 ,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M_{\mathrm{cs}}}} \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{(2{,}634{\cdot}10^9\ \mathrm{m})^3}{6{,}674{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2) \cdot 0{,}08 \cdot 2{\cdot}10^{30}\ \mathrm{kg}}}$$

$$T \approx 259\,794\ \mathrm{s} \approx 3\ \mathrm{nap}.$$

Ezen a képzeletbeli bolygón tehát egy év kb. 3 földi napig tartana!

$$\boxed{\langle P(J10)\rangle = 3{,}2 \pm 1{,}9}$$

Egy zárt sugárforrás két különböző energiájú gamma-sugárzó komponenst tartalmaz, melyek aktivitása rendre A_x és A_y. A sugárzást egy detektor méri, amely az energiákat nem különbözteti meg. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel most, hogy a detektor mindkét energiára azonos, de ismeretlen hatásfokkal működik. A forrás és a detektor közé homogén anyagot helyeznek. A gamma-sugárzás elnyelődése az anyagban exponenciális $\left(N(d) = N_0 \mathrm{e}^{-\mu d}\right)$, a kétféle gamma-sugárzásra vonatkozó lineáris abszorpciós tényezők: $\mu_x = 0{,}35\ \mathrm{cm}^{-1}$, $\mu_y = 0{,}09\ \mathrm{cm}^{-1}$. Határozzuk meg az aktivitások $r = A_x/A_y$ arányát, ha

i) $d = 5$ cm vastagság esetén a számlálási sebesség $N_1 = 1{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$,

ii) $2d = 10$ cm vastagság esetén $N_2 = 4{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$!

A két mérésre a számlálási sebességek (ε a detektor – ismeretlen – hatásfoka):

$$N_1 = \varepsilon \left(A_x \mathrm{e}^{-\mu_x d} + A_y \mathrm{e}^{-\mu_y d}\right),$$

$$N_2 = \varepsilon \left(A_x \mathrm{e}^{-2\mu_x d} + A_y \mathrm{e}^{-2\mu_y d}\right).$$

A kérdéses arány $r = A_x/A_y$, ezért emeljünk ki mindkét egyenlet jobb oldalából A_y-t:

$$N_1 = \varepsilon A_y \cdot \left(r \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} + \mathrm{e}^{-\mu_y d}\right),$$

$$N_2 = \varepsilon A_y \cdot \left(r \cdot \mathrm{e}^{-2\mu_x d} + \mathrm{e}^{-2\mu_y d}\right).$$

$$N_1 = \varepsilon A_y \cdot \left(r \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} + \mathrm{e}^{-\mu_y d} \right),$$
$$N_2 = \varepsilon A_y \cdot \left(r \cdot \mathrm{e}^{-2\mu_x d} + \mathrm{e}^{-2\mu_y d} \right).$$

A két egyenletet elosztva egymással az εA_y szorzótényező kiesik, és egyetlen egyenlet adódik az r ismeretlenre:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{r \cdot \mathrm{e}^{-2\mu_x d} + \mathrm{e}^{-2\mu_y d}}{r \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} + \mathrm{e}^{-\mu_y d}}.$$

Bevezetve az $n = N_2/N_1 \approx 0{,}323$ jelölést, és az egyenletet r-re rendezve kapjuk, hogy:

$$n \cdot r \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} + n \cdot \mathrm{e}^{-\mu_y d} = r \cdot \mathrm{e}^{-2\mu_x d} + \mathrm{e}^{-2\mu_y d},$$
$$r \left(n \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} - \mathrm{e}^{-2\mu_x d} \right) = \mathrm{e}^{-2\mu_y d} - n \cdot \mathrm{e}^{-\mu_y d},$$

$$r = \frac{\mathrm{e}^{-2\mu_y d} - n \cdot \mathrm{e}^{-\mu_y d}}{n \cdot \mathrm{e}^{-\mu_x d} - \mathrm{e}^{-2\mu_x d}} = \frac{\mathrm{e}^{-2\cdot 0{,}09\cdot 5} - 0{,}323 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}09\cdot 5}}{0{,}323 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}35\cdot 5} - \mathrm{e}^{-2\cdot 0{,}35\cdot 5}} \approx \frac{0{,}4066 - 0{,}2060}{0{,}0561 - 0{,}0302} \approx \frac{0{,}2}{0{,}0259} \approx 7{,}7.$$

→ Itt elhagytuk a $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{cm}^{-1}$ mértékegységeket, mivel ezek úgyis kiesnek.

$$\boxed{\langle P(S8) \rangle = 2{,}7 \pm 1{,}5}$$

Elektron–pozitron ütközésben $u\bar{u}$ kvark–antikvark párt akarunk kelteni. Legalább mekkorának kell lennie ehhez a pozitron mozgási energiájának, ha

a) az elektront és a pozitront ciklikus gyorsítóban egymással szemben keringetve azonos energiára gyorsítjuk?

b) a felgyorsított pozitron egy álló céltárgyban található elektronnal ütközik?

Adatok: az u kvark tömegét vegyük 2,3 MeV/c^2-nek, az elektron tömege $m_\mathrm{e} = 0{,}511$ MeV/c^2.

a) Az ütköztetőgyűrűben az elektron–pozitron rendszer teljes lendülete 0, így a kirepülő kvark–antikvark pár egymással 180°-ot bezáróan, ellentétes irányban repül ki.
A küszöbenergián a kvarkpár definíció szerint 0 sebességgel keletkezik, szimmetrikusan (tömegközépponti rendszerben nincs mozgási energia), a lendületmegmaradás így könnyen teljesül. A folyamat akkor jöhet létre, ha az elektron–pozitron pár teljes energiája nagyobb, mint a kvarkpár nyugalmi energiája:

$$2E_\mathrm{e} > 2m_\mathrm{u}c^2,$$
$$E_\mathrm{e} > m_\mathrm{u}c^2 = 2{,}3\ \mathrm{MeV}.$$

A minimálisan szükséges mozgási energia:

$$E_+ = E_\mathrm{e} - m_\mathrm{e}c^2 = 2{,}3\ \mathrm{MeV} - 0{,}511\ \mathrm{MeV} = 1{,}789\ \mathrm{MeV}.$$

b) Álló elektron esetén a teljes energia nem áll rendelkezésre új részecskék keltésére, hiszen a kezdeti állapotban meglevő (nem nulla) lendületnek a végállapotban is meg kell maradnia. A küszöbenergián a keletkező kvarkpár egyforma lendülettel, a pozitron eredeti mozgási irányában indul meg. A tömegközépponti rendszerben definíció szerint állnak.
Többrészecske-rendszerekre is érvényes a relativisztikus energia összefüggés:

$$\mathcal{E}^2 = (Pc)^2 + (M_0 c^2)^2,$$

ahol $\mathcal{E}, P, M_0$ a rendszer teljes energiája, lendülete és nyugalmi tömege.
Kifejezhető a rendszer invariáns (nyugalmi) tömege

$$\mathcal{E}^2 - (Pc)^2 = \left(M_0 c^2\right)^2,$$

ami inerciarendszer-független ($\Rightarrow$ négyesimpulzus-megmaradás).
Ebben az egyenletben két ismeretlenünk van, de két inerciarendszerben külön-külön felírva az invariáns tömeget már lesz két egyenletünk hogy a két ismeretlent kifejezzük.
A két praktikus viszonyítási rendszer a laborrendszer és a tömegközépponti (TKP) rendszer, ahol a rendszer teljes lendülete definíció szerint 0, megkönnyítve a számítást.
A TKP rendszerben a rendszer teljes energiája a részecskék nyugalmi energiája $\left(E^2_{\mathrm{TKP}} = \left(M_0 c^2\right)^2\right)$, ami tehát megmaradó mennyiség.

b) A TKP rendszerben a teljes tömeg (nyugalmi energia) $\left(M_0 c^2\right)^2 = \left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2$.
A laborrendszerben $\left(M_0 c^2\right)^2 = \left(E_+ + m_\mathrm{e} c^2\right)^2 - (p_+ c)^2$, ami ugyanaz a TKP rendszerben:

$$\left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2 = \left(E_+ + m_\mathrm{e} c^2\right)^2 - (p_+ c)^2,$$
$$\left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2 = E_+^2 + 2E_+ m_\mathrm{e} c^2 + \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2 - (p_+ c)^2.$$

A bejövő pozitronra a relativisztikus energia-összefüggés: $E_+^2 = (p_+ c)^2 + \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2$.

$$\left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2 = \cancel{(p_+ c)^2} + \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2 + 2E_+ m_\mathrm{e} c^2 + \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2 - \cancel{(p_+ c)^2},$$
$$\left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2 = 2(m_\mathrm{e} c^2)^2 + 2E_+ m_\mathrm{e} c^2.$$

Innen kifejezhető a bejövő pozitron energiája:

$$E_+ = \frac{\left(2m_\mathrm{u} c^2\right)^2 - 2\left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2}{2m_\mathrm{e} c^2} = \frac{2\left(m_\mathrm{u} c^2\right)^2 - \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^2}{m_\mathrm{e} c^2},$$
$$E_+ \approx \frac{2 \cdot (2{,}3\ \mathrm{MeV})^2 - (0{,}511\ \mathrm{MeV})^2}{0{,}511\ \mathrm{MeV}} \approx 20{,}194\ \mathrm{MeV}.$$

A pozitronnak tehát legalább 20,194 MeV − 0,511 MeV = 19,683 MeV mozgási energiával kell rendelkezni az $\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}$ kvarkpár keltéséhez.

$$\boxed{\langle P(S9)\rangle = 1{,}5 \pm 0{,}8}$$

Egy kis méretű, vékony falú, üreges, fekete felületű fémgömb vákuumban helyezkedik el. Kezdetben a gömb hőmérséklete T_0, a környező tér hőmérséklete T_k (állandó). A gömb kizárólag hőmérsékleti sugárzás útján cserél energiát a szintén tökéletes fekete sugárzónak tekintett környezetével.

a) Írjuk fel, mekkora a gömb és környezete közötti nettó sugárzási teljesítmény, ha a gömb pillanatnyi hőmérséklete T!

b) Tegyük fel, hogy $\Delta T = T - T_k \ll T_k$. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben a nettó teljesítmény jó közelítéssel arányos a kicsiny ΔT-vel!

c) Határozzuk meg, mennyi idő alatt csökken a kezdeti hőmérséklet-különbség a felére, és mutassuk meg, hogy az időbeli lefolyás exponenciális!

a) Az A felületű fekete test által egységnyi idő alatt kisugárzott teljesítményt a Stefan–Boltzmann-törvény adja meg:

$$P_{\mathrm{ki}} = \sigma A T^4.$$

A környezetből érkező sugárzás következtében elnyelt teljesítmény:

$$P_{\mathrm{be}} = \sigma A T_k^4.$$

A gömb és környezete közötti, egységnyi idő alatt bekövetkező hőcsere ezért:

$$P = \sigma A (T^4 - T_k^4).$$

b) Tegyük fel, hogy a gömb hőmérséklete csak kismértékben tér el a környezet hőmérsékletétől, azaz $T = T_k + \Delta T$, ahol $\Delta T \ll T_k$.
Ekkor elsőrendű közelítésben:

$$T^4 = (T_k + \Delta T)^4 = T_k^4 + 4T_k^3\Delta T + 6T_k^2\Delta T^2 + 4T_k\Delta T^3 + \Delta T^4 \approx T_k^4 + 4T_k^3\Delta T.$$

A negyedik hatványra emelt kifejezésben csak az első két tagot tartjuk meg, mert a többi tag rendre egy $\Delta T^4 \ll \Delta T^3 \ll \Delta T^2 \ll \Delta T \ll T_k$ faktorral kisebb.
Így a nettó teljesítmény:

$$P = \sigma A(T^4 - T_k^4) \approx \sigma A(T_k^4 + 4T_k^3\Delta T - T_k^4) = 4\sigma A T_k^3 \cdot \Delta T,$$

vagyis arányos a hőmérséklet-különbséggel.

c) Az m tömegű, c fajhőjű gömb belső energiájának megváltozása

$$\Delta U = mc\,\Delta T = mc\,\Delta(\Delta T).$$

Az energiamegmaradás alapján:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -P,$$

amiből

$$mc\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta t} = -4\sigma A T_k^3 \Delta T.$$

c)

$$mc\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta t} = -4\sigma A T_k^3 \Delta T.$$

Ez az egyenlet alakjában megegyezik a radioaktív bomlást leíró egyenlettel. Átrendezve:

$$\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta t} = -\lambda \Delta T, \qquad \lambda = \frac{4\sigma A T_k^3}{mc}.$$

A megoldás hasonlóan exponenciális alakban adódik:

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

A hőmérséklet-különbség felezési ideje ebből

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{mc}{4\sigma A T_k^3} \ln 2.$$

$$\boxed{\langle P(S10) \rangle = 2{,}3 \pm 1{,}8}$$