Országos Szilárd Leó Fizikaverseny – Elődöntő 2025.
Megoldások

Minden feladat helyes megoldása 5 pontot ér. A feladatokat tetszőleges sorrendben lehet megoldani. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak. A megoldáshoz bármilyen „offline” segédeszköz használható, telekommunikációs eszközök használata tilos. Rendelkezésre álló idő: 180 perc.
A javító tanár belátása szerint az 5 pont az itt megadottaktól eltérő formában is felosztható. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldást is természetesen értékelni kell!

1. Feladat: **(kitűzte: Papp Gergely, Radnóti Katalin & Tarján Péter || 5 pont)**

Röviden indokoljuk meg, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak!

a) Szilárd és Wigner támogatták az első atombomba bevetését, hiszen mindketten dolgoztak a bomba fejlesztéséhez kapcsolódó kutatásokon.

b) A Nap energiatermelését atommagfúzió adja, míg a Paksi Atomerőműben az atommaghasadást hasznosítják.

c) A Nobel-díjas Krausz Ferenc és kollégái lézerekkel „attoszekundumos” impulzusokat állítottak elő. Állítás: előállítható olyan attoszekundumos impulzus, aminek szélessége („hossza”) 1 attoszekundum, és központi hullámhossza a látható fény tartományba esik.

d) Egy radioaktív mintában kétféle atom van, a T felezési idővel bomló anyaelem, és annak stabil leányeleme. Kezdetben ezek mennyiségének aránya $N_{\text{anya}}/N_{\text{leány}} = 5/1$. Ahhoz, hogy ez az arány éppen megforduljon, $N'_{\text{anya}}/N'_{\text{leány}} = 1/5$, pontosan két felezési idő kell elteljen.

e) A Föld mélyéről felszínre hozott földgázban található hélium izotópjainak $^{3}\text{He}/^{4}\text{He}$ arányszáma jelentősen kisebb, mint a világűrt jellemző $^{3}\text{He}/^{4}\text{He}$ arányszám.

Megoldás:

→ Az itt írottnál rövidebb magyarázat is elegendő. Az indoklás nélküli igaz/hamis válasz 0 pontot ér!

a) **HAMIS.** Bár Szilárd és Wigner valóban dolgoztak a bomba fejlesztéséhez kapcsolódó kutatásokon, mind a ketten ellenezték az atombomba tényleges bevetését. Ellenkezésüknek egy, az USA elnökének címzett petícióban is hangot adtak, bár ez végül nem ért célt. **(1 pont)**

b) **IGAZ.** A Napban az ún. proton-proton láncú magfúzió megy végbe, ahol több lépésben, végeredményben 4 protonból lesz egy hélium atommag. A Paksi Atomerőműben pedig az ^{235}U hasadását használják fel. **(1 pont)**

c) **HAMIS.** Az 1 attoszekundum szélességű lézerimpulzus központi hulllámhosszának periódusideje nem lehet 1 attoszekundumnál hosszabb. Az ehhez tartozó frekvencia $1\cdot 10^{18}$ Hz, ami a függvénytáblázat alapján a röntgen tartományba esik. **(1 pont)**
Megjegyzés: A legrövidebb eddig előállított impulzus szélessége („hossza”) kb. 43 attoszekundum.

d) **HAMIS.** Kezdetben a mintában van 5 egység anyamag, és 1 egység leánymag. A későbbi időpontban 1 egység anyamag és 5 egység leánymag alkotja a mintát. Azaz 4 egység anyamag bomlott el, és lett belőle 4 egység stabil leánymag. A kérdés tehát, hogy mennyi idő alatt csökken *ötödére* az anyaelem mennyisége. Két felezési idő alatt csak negyedére csökkenne. **(1 pont)**
Megjegyzés: Bomlástörvény felírásával kaphatjuk számszerűen is, hogy $t = \log_2(5)\cdot T \approx 2{,}32\cdot T$.

e) **IGAZ.** A Föld mélyén található nehéz atommagok alfa-bomlásai során keletkező $^{4}\text{He}^{2+}$ magok elektronokat felvéve hélium atomokat alkotnak, és ezáltal végeredményben hélium gáz keletkezik. A föld alatti gázlelőhelyeken ez a hélium is felhalmozódik. Ez csökkenti a $^{3}\text{He}/^{4}\text{He}$ arányt. **(1 pont)**
Megjegyzés: Az általunk használt hélium nagy része ebből a forrásból származik, mivel a légköri hélium folyamatosan szökik a légkörből.

2. Feladat: **(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)**

A banán magas káliumtartalma miatt az interneten olykor előkerül a „banándózis” kifejezés.

a) Mekkora lehet egy banán ^{40}K izotópból származó aktivitása?

b) Keletkeznek-e neutrínók vagy antineutrínók egy banánban, és ha igen, mely folyamatok révén?

c) Az előző kérdésre igen válasz esetén adjuk meg, hogy hány ilyen részecske keletkezhet másodpercenként!

Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program
HIFLYLABS

Adatok: egy banán káliumtartalma kb. 429 mg. A ^{40}K felezési ideje $T = 1{,}25{\cdot}10^9$ év $\approx 3{,}94{\cdot}10^{16}$ s. A ^{40}K izotóp a természetes kálium 0,012%-a. A természetes kálium móltömege $M \approx 39$ g/mol. A ^{40}K bomlása során $\approx 89\%$-ban ^{40}Ca, míg $\approx 11\%$-ban ^{40}Ar izotópok keletkeznek.

Megoldás:

a) A kálium móltömege jó közelítéssel $M \approx 39$ g/mol, így 429 mg $\approx 0{,}011$ mol $\approx 6{,}6{\cdot}10^{21}$ darab kálium atom. Ennek 0,012%-a ^{40}K, ami $N \approx 7{,}92{\cdot}10^{17}$ számú atom. Ennek aktivitása

$$A = \lambda N = \frac{\ln(2)}{T} N \approx \frac{0{,}693}{3{,}94{\cdot}10^{16}\ \mathrm{s}} \cdot 7{,}92{\cdot}10^{17} \approx 14\ \mathrm{Bq}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Megjegyzés: Számíthatunk úgy is, hogy kiszámítjuk a kálium fajlagos aktivitását (32 Bq/g) és ezt szorozzuk a megadott tömeggel. A felezési idő év-másodperc átváltásában figyelembe vettük a szökőéveket, azaz 1 év = 365,24 nap.

b) A függvénytáblában az szerepel, hogy a ^{40}K 89%-ban negatív béta-bomló, míg 11%-ban elektronbefogással bomlik. A negatív béta-bomlásnál keletkezik egy antineutrínó, míg az elektronbefogásnál egy neutrínó. A függvénytábla helyett következtethetünk a megadott Ar és Ca leányelemek rendszámaiból is. **(1 pont)**

c) A másodpercenként keletkező neutrínók és antineutrínók összes száma egyezik az aktivitással, arányuk a fenti 11:89-el egyenlő. **(1 pont)**

3. Feladat: **(kitűzte: Gulyás Attila || 5 pont)**

A cukor az emberi testben ún. lassú égéssel alakul át vízzé és szén-dioxiddá. Tegyük fel, hogy ez az átalakulás tökéletes égés. Az ionizáló sugárzás melegít is, a dózis pontos mérőeszközeként kalorimétert is használnak.

a) Ionizáló sugárzás által keltett mekkora dózis (Gy) okoz elméletileg akkora hőmérsékletnövekedést, mint 1 kockacukor tökéletes eloszlása és elégése a testben?

b) Számítsuk ki ezt az elméleti hőmérsékletnövekedést!

c) Hány gramm cukornyi energia koncentrálódik 1 g tömegű (≈ 1 cm^3 térfogatú) testszövetben elméletileg, ha az 75 Gy dózist kapott? (Ez egy tipikus daganatkezelés.)

d) Számítsuk ki a c) kérdésben szereplő testszövetben létrejövő hőmérsékletnövekedést is!

Adatok: a cukor égéshője (energiakoncentrációja) $H_\mathrm{f} = E/m = 16{,}17$ kJ/g, egy kockacukor tömege $m_\mathrm{k} = 3{,}5$ g. Vegyük az emberi test átlagos fajhőjét $c = 3{,}5\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)}$-nek, átlagos tömegét pedig 75 kg-nak.

Megoldás:

a) Egy kockacukor energiatartalma

$$E_\mathrm{k} = 16{,}17\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{g}} \cdot 3{,}5\ \mathrm{g} \approx 56{,}6\ \mathrm{kJ}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha ennyi energia érné ionizáló sugárzásból az ember testét, úgy az abból eredő dózis

$$D = \frac{E}{m} = \frac{56{,}6{\cdot}10^3\ \mathrm{J}}{75\ \mathrm{kg}} \approx 755\ \mathrm{Gy}.\ (!) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés: Összehasonlításképpen: a $3-4$ Sv egésztest-dózis halálozási rátája 50%.

b) A hőmérsékletnövekedést az energianövekményből kapjuk: $\Delta E = cm\Delta T$,

$$\Delta T = \frac{E}{cm} = \frac{D}{c} = \frac{56{,}6\ \mathrm{kJ}}{3{,}5\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)} \cdot 75\ \mathrm{kg}} \approx 0{,}22\ \mathrm{K} \equiv 0{,}22\,^\circ\mathrm{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Figyeljük meg, hogy a tömeg kiesik az egyenletből - a dózis és a hőmérsékletemelkedés között csak a fajhő teremt kapcsolatot.

Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Tehetség Program HIFLYLABS

c) A testszövet tömege 1 g. Az energia a dózis definíciójából

$$E_{\mathrm{sz}} = D_{\mathrm{sz}} \cdot m_{\mathrm{sz}} = 75\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdot 1{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg} = 0{,}075\ \mathrm{J}.$$

Innen a cukor tömege $m = 0{,}075\ \mathrm{J}/(16{,}17{\cdot}10^3\ \mathrm{J/g}) \approx 4{,}64\ \mu\mathrm{g}$, egy cukorszemcse töredéke. **(1 pont)**

d) Hasonlóan a korábbiakhoz

$$\Delta T_{\mathrm{sz}} = \frac{E_{\mathrm{sz}}}{c_{\mathrm{sz}} m_{\mathrm{sz}}} = \frac{D_{\mathrm{sz}}}{c_{\mathrm{sz}}} = \frac{75\ \mathrm{J/kg}}{3500\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}} \approx 0{,}021\ \mathrm{K} \equiv 0{,}021\ {}^\circ\mathrm{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés: Ha észrevesszük, hogy a megadott dózis majdnem pontosan 1/10-ed része az a) rész eredményének, abból is számíthatunk közvetlenül, mivel $\Delta T = D/c$, és így a hőmérsékletnövekedés is $\approx 1/10$-ed része a 0,22 foknak.

4. Feladat: **(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)**

Határozzuk meg a következő részecskék (mozgási) energiáját, és rakjuk növekvő sorrendbe őket:

a) az elektron Compton-hullámhosszával megegyező hullámhosszú foton;

b) az elektron Compton-hullámhosszával megegyező de Broglie-hullámhosszú müon;

c) egy αc sebességű elektron, ahol $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ a finomszerkezeti állandó!

Adatok: $m_\mu = 1{,}88{\cdot}10^{-28}$ kg, $m_{\mathrm{e}} = 9{,}11{\cdot}10^{-31}$ kg, $c \approx 3{\cdot}10^8$ m/s; $m_{\mathrm{e}}c^2 \approx 511$ keV, $m_\mu/m_{\mathrm{e}} \approx 207$.

Megoldás:

a) Az elektron Compton-hullámhossza (függvénytábla):

$$\lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c} = 2{,}43{\cdot}10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

A de Broglie összefüggéssel ($p = h/\lambda$) összevetve látjuk, hogy ilyenkor a lendület éppen $p_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}}c$. Az ennek megfelelő fotonenergia:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \equiv p_{\mathrm{e}}c \equiv m_{\mathrm{e}}c^2 \approx 511\ \mathrm{keV} \approx 8{,}19{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{J}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az ezzel megegyező de Broglie-hullámhosszú müon lendülete szintén p_{e}:

$$p = \frac{h}{\lambda} \equiv p_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}}c \approx 2{,}73{\cdot}10^{-22}\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így a (nem relativisztikus) mozgási energia

$$E_\mu = \frac{p_{\mathrm{e}}^2}{2m_\mu} = \frac{(m_{\mathrm{e}}c)^2}{2m_\mu} = \frac{\left(2{,}73{\cdot}10^{-22}\ \mathrm{kg \cdot m/s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}88{\cdot}10^{-28}\ \mathrm{kg}} \approx 1{,}98{\cdot}10^{-16}\ \mathrm{J}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

c) Az elektron sebessége

$$v_{\mathrm{e}} = \alpha c \approx \frac{c}{137} = 2{,}19{\cdot}10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(nem relativisztikus), ezzel a mozgási energiája

$$E_{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{e}}^2}{2} = \frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{2 \cdot (137)^2} \equiv \frac{E_\gamma}{2 \cdot (137)^2} \approx \frac{8{,}19{\cdot}10^{-14}\ \mathrm{J}}{37538} \approx 2{,}18{\cdot}10^{-18}\ \mathrm{J}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés: Ennyi a hidrogénatomban az alapállapotú elektron sebessége ill. mozgási energiája, i.e. ennyi az alapállapotú hidrogén ionizációs energiája.

Így a mozgási energia szerinti sorrend: $E_{\mathrm{e}} < E_\mu < E_\gamma$. **(1 pont)**

Alternatív megoldás: A feladat nem kötötte ki milyen mértékegységben határozzuk meg a mozgási energiákat. Számíthatunk keV-ben vagy elektron nyugalmi energia egységekben ($m_{\mathrm{e}}c^2$) is, ezzel elkerülve a lendületekkel, illetve tíz hatványokkal történő bíbelődést:

Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Tehetség Program · mnt · BMENT · eszi · HIFLYLABS

a) A Compton-hullámhossz képletét ($\lambda_C = h/(m_e c)$) a de Broglie összefüggéssel ($p = h/\lambda$) összevetve látjuk, hogy

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \equiv p_e c \equiv m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) A müonra $p_\mu = p_e = m_e c$. Kihasználva, hogy $m_\mu \approx 207 m_e$, amivel a (nem relativisztikus) mozgási energia

$$E_\mu = \frac{p_e^2}{2m_\mu} = \frac{(m_e c)^2}{2m_\mu} = m_e c^2 \cdot \frac{m_e}{2m_\mu} = \frac{511 \text{ keV}}{2 \cdot 207} \approx 1{,}23 \text{ keV}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

c) Mivel $\alpha \approx 1/137$, így

$$E_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{m_e(\alpha c)^2}{2} = \frac{m_e c^2}{2 \cdot (137)^2} = \frac{511 \text{ keV}}{2 \cdot (137)^2} \approx 13{,}6 \text{ eV}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés: Itt is ismerős lehet a 13,6 eV, mint az alapállapotú hidrogénatom ionizációs energiája.

A sorba rendezés tehát $E_e < E_\mu < E_\gamma$. **(1 pont)**

5. Feladat: **(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)**

A ^{42}Ca izotóp moláris tömege 41,9586 g/mol, a ^{43}Ca-é 42,9588 g/mol. Mindkét izotóp stabil. A megadott moláris tömegek semleges atomokra vonatkoznak (atomtömegek).

a) Határozzuk meg a két mag egy nukleonra jutó kötési energiáját (fajlagos kötési energia)!

b) Melyik mag esetében nagyobb a fajlagos kötési energia, és miért? Adjunk kvalitatív magyarázatot!

Adatok: $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_e = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg, $N_A = 6{,}0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s, $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C.

Megoldás:

a) A mag tömegét a moláris tömegből és az Avogadro-állandóból határozzuk meg. Az elektronok tömegét le kell vonni a megadott atomtömegekből!

$$m_{\text{mag}} = \frac{M}{N_A} - Z \cdot m_e, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$m_{\text{m42}} = \frac{41{,}9586 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{6{,}0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} - 20 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx 6{,}9656 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_{\text{m43}} = \frac{42{,}9588 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{6{,}0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} - 20 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \approx 7{,}1317 \cdot 10^{-26} \text{ kg}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

→ Elvi hiba az elektronok tömegét nem levonni. Ez esetben erre a részre 0 pont jár.

A fajlagos kötési energia:

$$\varepsilon = \frac{(Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{mag}})c^2}{A}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\varepsilon_{42} = \frac{(20m_p + (42-20)m_n - m_{\text{m42}})c^2}{42} \approx 1{,}3773 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 8{,}5965 \text{ MeV},$$

$$\varepsilon_{43} = \frac{(20m_p + (43-20)m_n - m_{\text{m43}})c^2}{43} \approx 1{,}3746 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 8{,}5794 \text{ MeV}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

→ A tömegdefektus relatív kis értéke miatt oda kell figyelni a használt tizedesjegyekre. A fenti eredményeket a 4 tizedes pontossággal megadott adatokkal számítottuk. Ezzel $\varepsilon_{42} - \varepsilon_{43} \approx 17$ eV (az irodalmi adat ≈ 16 eV). Ha a versenyző más konstansokat, vagy más kerekítéseket (stb) használ, de eredményül helyesen kijön hogy $\varepsilon_{42} > \varepsilon_{43}$, és a nagyságrendek jók, azt is elfogadjuk teljes értékű megoldásnak.

b) A stabil magok fajlagos kötési energia görbéjén a maximális érték a 60-as tömegszám környékén van. A ^{42}Ca magnak nagyobb a fajlagos kötési energiája, annak ellenére, hogy a tömegszáma távolabb van a 60-as tömegszámtól. Érdekes továbbá, hogy bár azt mondják, hogy „a neutronok tartják össze az egymást taszító protonokat”, mégis a több neutronnal rendelkező ^{43}Ca a kevésbé kötött a két mag közül. Ennek oka, hogy a ^{42}Ca mag páros proton- és neutronszámmal rendelkezik (20 ill. 22). A félempirikus kötési energia formulában ezt a párenergia tag fejezi ki, ami páros-páros magok esetén bónuszt ad a kötési energiához, míg a páros-páratlan ^{43}Ca mag esetében 0. **(1 pont)**

Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Tehetség Program mnt esz HIFLY LABS

6. Feladat: **(kitűzte: Halász Máté || 5 pont)**
Becsüljük meg a technécium biológiai felezési idejét, ha egy vizsgált személy egy pajzsmirigy szcintigráfia során 110 MBq aktivitású ^{99m}Tc-ot tartalmazó oldatot kapott, és a bejuttatást követően 6 órával a testében lévő ^{99m}Tc aktivitása 13 MBq volt. Adatok: A ^{99m}Tc fizikai felezési ideje ≈ 6 h.

Megoldás:
Az effektív felezési idő a kezdeti és 6 óra elteltével mért aktivitásból számítható:

$$T_{\text{eff}} = \frac{t}{\log_2 (A_0/A_t)} = \frac{6\ \text{h}}{\log_2(110\ \text{MBq}/13\ \text{MBq})} \approx 1{,}947\ \text{h}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A biológiai felezési idő a bomlási állandókra felírt összefüggésből meghatározható. A biológiai ürítés és a radioaktív bomlás egymással párhuzamosan csökkenti a testen belüli aktivitást, ezért az ezekből eredő megváltozás összeadódik:

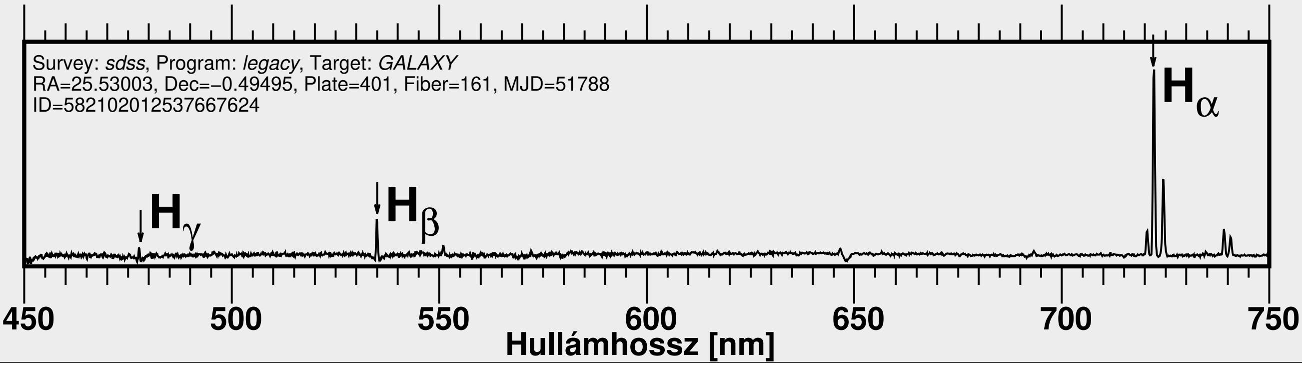
$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{eff}} &= \Delta N_{\text{f}} + \Delta N_{\text{b}}, \\ N\lambda_{\text{eff}} &= N\lambda_{\text{f}} + N\lambda_{\text{b}}, \\ \lambda_{\text{eff}} &= \lambda_{\text{f}} + \lambda_{\text{b}}. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Kihasználva, hogy $T_{\text{b}} = \ln(2)/\lambda_{\text{b}}$:

$$T_{\text{b}} = \frac{\ln(2)}{\frac{\ln(2)}{T_{\text{eff}}} - \frac{\ln(2)}{T_{\text{f}}}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\text{eff}}} - \frac{1}{T_{\text{f}}}} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}947\ \text{h}} - \frac{1}{6\ \text{h}}} \approx 2{,}88\ \text{h}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Alternatív megoldás: Kiindulhatunk onnan is, hogy ez a két folyamat függetlenül zajlik, $N(t)/N(0) = 2^{-t/T_{\text{f}}} \cdot 2^{-t/T_{\text{b}}}$, ezek eredője az effektív felezési idő ($1/T_{\text{eff}} = 1/T_{\text{f}} + 1/T_{\text{b}}$), amit a fenti képlet is mutat.

7. Feladat: **(kitűzte: Papp Gergely || 5 pont)**
Az ábra egy távoli galaxisból jövő fény hullámhossz szerinti felbontását (színképét, más néven spektrumát) mutatja. Az ábrán segítségképpen bejelöltük a hidrogén három színképvonalát. Ezek a vonalak az ún. Balmer-sorozathoz tartoznak. Labor körülmények között ezek hullámhosszai rendre H_α = 656,28 nm (vörös), H_β = 486,13 nm (kékeszöld), H_γ = 434,05 nm (ibolya). Az ábra segítségével becsüljük meg, hogy a galaxis hogyan és mekkora sebességgel mozog a Földhöz képest!



Megoldás:
A megfigyelt hullámhosszak (ábra) $\lambda_\alpha \approx 722$ nm, $\lambda_\beta \approx 535$ nm, $\lambda_\gamma \approx 478$ nm. **(1 pont)**
A hullámhosszak megnőttek a labor (nyugalmi) értékekhez képest, a vörös irányba tolódtak el, tehát a kérdéses galaxis távolodik a Földtől. **(1 pont)**

Vonal	λ_{m} [nm]	λ_{f} [nm]	$\lambda_{\text{m}}/\lambda_{\text{f}}$
α	722	656,28	1,1(001)
β	535	486,13	1,1(005)
γ	478	434,05	1,1(013)

A sebesség meghatározásához a Doppler-effektus képletét kell felhasználjuk. Ehhez először számítsuk ki a λ_{m} megfigyelt és λ_{f} forrás hullámhosszak arányát (lásd a táblázatot)! A három érték átlaga jó közelítéssel $\langle \lambda_{\text{m}}/\lambda_{\text{f}} \rangle \approx 1{,}10063 \approx 1{,}1$. **(1 pont)**
Mivel a hullámhossz megváltozása kb 10%, ezért számíthatunk nemrelativisztikusan.

Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program
mnt
ESZI
HIFLY LABS

A függvénytáblázatban szerepel a hangtani Doppler-effektus. Itt figyelembe veszik hogy a hang terjedési közegéhez képest milyen irányban és sebességgel mozog a forrás *és a megfigyelő is.* A feladatból látjuk, hogy az eltolódott hullámhossz megnőtt (vöröseltolódás), tehát a forrás galaxis a megfigyelőtől távolodik. Ekkor klasszikusan írhatjuk:

$$f_{\mathrm{m}} = f_{\mathrm{f}} \frac{c \pm v_{\mathrm{m}}}{c + v_{\mathrm{f}}}.$$

Ahol a megfigyelő sebességének előjele attól függ, hogy a megfigyelő közeledik vagy távolodik-e a forráshoz képest a hullámterjedési közeg inerciarendszerében. A fénysebesség viszont minden inerciarendszerben ugyanaz, ezért vizsgálhatjuk a folyamatot a megfigyelőhöz rögzített inerciarendszerből, ahol $v_{\mathrm{m}} = 0$. A képletet átírva hullámhosszra ($f\lambda = c$) kapjuk, hogy

$$\lambda_{\mathrm{m}} = \lambda_{\mathrm{f}} \frac{c + v_{\mathrm{f}}}{c} \Longrightarrow \frac{\lambda_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{f}}} = 1 + \frac{v_{\mathrm{f}}}{c}.$$

Korábban kiszámítottuk, hogy átlagosan $\lambda_{\mathrm{m}}/\lambda_{\mathrm{f}} = 1{,}1$, amiből $v_{\mathrm{f}}/c \approx 0{,}1$ és $v_{\mathrm{f}} \approx 3{\cdot}10^7$ m/s.
A sebesség előjele pozitív, mivel azt tételeztük fel, hogy a forrás távolodik. **(2 pont)**

→ `Leolvasási pontosságon belüli értékek elfogadhatók teljes értékű megoldásként. Ha valaki csak egy vonalat használ, de az eredménye jó, az 1 pont levonással jár.`

Alternatív megoldás: Lehet a relativisztikus Doppler képlettel is dolgozni (lásd a 2022. évi elődöntő 6-os feladat megoldását). A relativisztikus Doppler-összefüggés értelmében a megfigyelt hullámhossz (λ_{m}) és a forrás hullámhossz (λ_{f}) között a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\frac{f_{\mathrm{f}}}{f_{\mathrm{m}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{m}}}{\lambda_{\mathrm{f}}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

ahol $\beta = v/c$, v a forrás és megfigyelő egymáshoz viszonyított sebessége. Ebből

$$\beta = \frac{\lambda_{\mathrm{m}}^2 - \lambda_{\mathrm{f}}^2}{\lambda_{\mathrm{m}}^2 + \lambda_{\mathrm{f}}^2} = \frac{(\lambda_{\mathrm{m}}/\lambda_{\mathrm{f}})^2 - 1}{(\lambda_{\mathrm{m}}/\lambda_{\mathrm{f}})^2 + 1} = \frac{1{,}1^2 - 1}{1{,}1^2 + 1} \approx 0{,}0950 \Longrightarrow v_{\mathrm{f}} \approx 2{,}85{\cdot}10^7 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

`Megjegyzés`: A vöröseltolódás z paraméterét úgy szokták definiálni, hogy

$$z = \frac{\lambda_{\text{megfigyelt}} - \lambda_{\text{nyugalmi}}}{\lambda_{\text{nyugalmi}}} = \frac{\lambda_{\text{megfigyelt}}}{\lambda_{\text{nyugalmi}}} - 1,$$

mert ezt könnyű számítani, és ebből egyből kapjuk a forrás v sebességét: $v = z \cdot c$.

8. Feladat: **(kitűzte: Szűcs József || 5 pont)**
Egy fotocella katódját 400 nm hullámhosszúságú fénnyel világítjuk meg. Ekkor a fotoáram zárófeszültsége 0,5 V lesz.
a) Milyen fémből készülhetett a cella fotókatódja? (Használjunk függvénytáblázatot!)
b) Milyen feltételnek kell eleget tegyen a megvilágító fény hullámhossza, hogy fotoáram létrejöhessen?

Megoldás:
A fotoeffektus egyenlete a függvénytáblában

$$hf = W_{\mathrm{ki}} + \frac{1}{2} m v^2, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahol $h = 6{,}626{\cdot}10^{-34}$ Js a Planck-állandó, f a foton frekvenciája, ($E = hf$ a foton energiája), W_{ki} az anyagfüggő kilépési munka, és $mv^2/2$ a kilépő elektron mozgási energiája.
a) Az anyag meghatározásához az egyenletet rendezzük a kilépési munkára

$$W_{\mathrm{ki}} = hf - \frac{1}{2} m v^2.$$

Most közös mértékegységre kell hozzunk mindent. A függvénytáblázat kilépési munka táblázata aJ és eV értékekben adja meg a kilépési munkát. Az elektron energiája eleve eV-ban adott, a feladat szövege szerint 0,5 eV ≈ 0,08 aJ. A foton energia

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{400\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}\cdot} \approx 0{,}497\ \mathrm{aJ} \approx 3{,}1\ \mathrm{eV}.$$

Innen $W_{\mathrm{ki}} = 3{,}1\ \mathrm{eV} - 0{,}5\ \mathrm{eV} = 2{,}6\ \mathrm{eV}$, vagy $W_{\mathrm{ki}} = 0{,}497\ \mathrm{aJ} - 0{,}08\ \mathrm{aJ} \approx 0{,}42\ \mathrm{aJ}$, amihez a bárium (táblázatban: 2,60 eV és 0,42 aJ) áll a legközelebb. **(2 pont)**

→ Közel áll még a lítium (2,64 eV) és nátrium (2,55 eV) is. Ha a számítás alapvetően jó, de esetleg nem a kapott eredményhez legközelebbi elemet nevezi meg a versenyző, azt is elfogadjuk megoldásnak.

b) A határhullámhossz a kilépési munkából számítható. Kihasználva, hogy épp most számítottuk ki, hogy 400 nm → 3,1 eV, amiből 2,6 eV → 470 nm. (Figyeljünk a fordított arányosságra!) A határhullámhossznál **rövidebb** hullámhosszak (nagyobb fotonenergiák) képesek fotoeffektust kiváltani. **(2 pont)**

Alternatív megoldás: Számíthatunk direkt a függvénytáblában található képlettel. Vagy már korábban kiszámítottuk aJ-ban a kilépési munkát, vagy ha eV-ban számítottunk, átszámíthatjuk; vagy a táblázatból kikereshetjük, hogy báriumra $W_{\mathrm{ki}} = 0{,}42$ aJ, és innen

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{W_{\mathrm{ki}}} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{0{,}42\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}} \approx 473\ \mathrm{nm}.$$

9. Feladat: **(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)**

Egy vörös törpecsillag felszíni hőmérséklete 2500 K, tömege a Nap tömegének 8%-a.

a) Milyen távolságban kell keringenie egy exobolygónak ekörül, hogy ugyanakkora legyen a napállandónak nevezett mennyiség, mint a Földön?

b) Hogyan aránylik ez a Nap-Föld távolsághoz?

c) Mekkora lenne egy ekkora távolságban keringő exobolygó keringési ideje?

Adatok: A csillag sugara $8{,}3\cdot 10^{7}$ m, a Stefan-Boltzmann állandó $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$, A Nap-Föld átlagos távolsága (1 Csillagászati Egység, 1 CsE) $\approx 1{,}5\cdot 10^{11}$ m, a Nap tömege $m_{\mathrm{N}} = 2\cdot 10^{30}$ kg, a földi napállandó $S_{\mathrm{F}} = 1361\ \mathrm{W/m^2}$, a gravitációs állandó $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$. Az egyszerűség kedvéért számítsunk kör alakú pályával.

Megoldás:

a) A Stefan-Boltzmann törvényből egy hőmérsékleti sugárzó test által kibocsátott teljesítmény

$$P = A\epsilon\sigma T^4,$$

ahol A a test felülete, ϵ az emisszivitás (csillagokra jó közelítéssel $\epsilon \approx 1$), és T a test felületi hőmérséklete Kelvinben. A Napállandó azt fejezi ki, hogy mennyi sugárzási teljesítmény érkezik a Napból a Föld pályáján egységnyi felületre, azaz

$$S_{\mathrm{F}} = \frac{4R_{\mathrm{N}}^2\pi\sigma T_{\mathrm{N}}^4}{4r^2\pi} = \frac{R_{\mathrm{N}}^2\sigma T_{\mathrm{N}}^4}{r^2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ebből kifejezhetjük az r átlagos keringési távolságot a kérdéses törpecsillagra:

$$r = RT^2\sqrt{\frac{\sigma}{S_{\mathrm{F}}}} = 8{,}3\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}\cdot(2500\ \mathrm{K}^2)\sqrt{\frac{5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}}{1361\ \mathrm{W/m^2}}} \approx 3{,}35\cdot 10^{9}\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az arány $1{,}5\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}/3{,}35\cdot 10^{9}\ \mathrm{m} \approx 44{,}8$ – a bolygó nagyon közel kell keringjen a csillaghoz. **(1 pont)**

c) A pályán maradáshoz szükséges centripetális erőt a gravitációs vonzás adja:

$$mr\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{mM}{r^2} \Longrightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3,$$

Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program
mnt
ELTE
esza
HIFLY LABS

amiben felismerhetjük Kepler III. törvényét ($T^2 \propto r^3$). Behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}35\cdot10^9\ \mathrm{m})^3}{6,67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg})\cdot 0{,}08\cdot 2\cdot10^{30}\ \mathrm{kg}}} \approx 3{,}7\cdot10^5\ \mathrm{s} \approx 103{,}5\ \mathrm{h} \approx 4{,}3\ \text{nap}.$$

(2 pont)

Ahogy azt látjuk – és a Kepler III-ból is tudhatjuk – a keringési idő nem függ a bolygó (test) tömegétől, ez kiesik az erőegyensúlyból. Ezért mindegy hogy milyen tömegű a bolygó.

Megjegyzés: A megadott adatok a TRAPPIST-1 rendszerhez kapcsolódnak. A TRAPPIST-1d exobolygó keringési ideje ≈ 4,05 nap.

10. Feladat: **(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)**

Egy gyorsítóban egy, a fénysebesség felével haladó elektron mozgási energiáját négyszeresére növeljük. Mekkora értéket kapunk az elektron sebességére fénysebesség egységekben a gyorsítás végén akkor,

a) ha klasszikusan számítunk,

b) ha relativisztikusan számítunk?

Megoldás:

a) Klasszikusan a mozgási energia a sebesség négyzetével arányos, $E_\mathrm{m} \propto v^2$, ezért a mozgási energia 4-szeresére növelése 2-szeres sebességet jelent, ami épp a fénysebesség lenne. **(1 pont)**
A valóságban az elektron sebessége sosem érheti el a fénysebességet (relativitáselmélet).

b) A speciális relativitáselmélet szerint a teljes energia a nyugalmi és mozgási energia összege. A nyugalmi energia m_0c^2, míg a részecske **teljes** energiáját az $E = \gamma m_0 c^2$ fejezi ki, ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ **(1 pont)**

a relativisztikus gamma-faktor, v a részecske sebessége, és m_0 a részecske (nyugalmi) tömege. Néha összevonásra kerül a γm_0 tag mint $\gamma m_0 = m$, és így kapjuk a híres $E = mc^2$ képletet.
A fentiekből kifejezhető egy részecske mozgási energiája úgy, mint a teljes és nyugalmi energiák különbsége, azaz

$$E_\mathrm{m} = E - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2.$$ **(1 pont)**

Ha most az 1-es index a gyorsítás előtti, a 2-es a gyorsítás utáni állapotot jelzi, akkor a feladat szövegének értelmében a mozgási energia a négyszeresére nőtt, azaz

$$(\gamma_2 - 1) m_0 c^2 = 4(\gamma_1 - 1) m_0 c^2,$$
$$(\gamma_2 - 1) = 4(\gamma_1 - 1).$$

Innen a kérdéses v_2/c a γ_2-ből lesz kifejezhető. γ_1-et a feladat szövegéből számíthatjuk:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$ **(1 pont)**

Ezt visszahelyettesítve, és γ_2-re rendezve

$$\gamma_2 = 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) + 1 \approx 1{,}62 \Longrightarrow \beta_2 = \frac{v_2}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_2^2}} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}62^2}} \approx 0{,}786.$$

Azaz a részecske sebessége a gyorsítás után a fénysebeség 78,6%-a. **(1 pont)**

Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Tehetség Program · HIFLY LABS