

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 2025 Döntő Elméleti feladatok megoldásai

Papp Gergely & Tarján Péter

Max Planck Plazmafizika Intézet (München) & Nyíregyházi Egyetem
gergely.papp@ipp.mpg.de, tarjan.peter@nye.hu

2025-04-27



Amikor egy neutron ${}^9_4\text{Be}$ atommagokkal egymás után rugalmasan ütközik, átlagosan mozgási energiájának 18,7%-át veszíti el ütközésenként. Átlagosan hány ütközés szükséges egy berillium moderátoros reaktorban egy tipikus hasadási neutron (1,6 MeV) termikus energiára (0,025 eV) történő lassulásához?

A neutron minden ütközésben az aktuális energiájának 18,7%-át veszíti el, azaz az ütközés utáni és előtti energiák aránya $E'/E = 1 - 0,187 = 0,813$.

A neutron energiája tehát exponenciálisan csökken. Ha N jelöli a neutron ütközéseinek számát, akkor

$$E(N) = E(0) \cdot 0,813^N.$$

Innen

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{E(N)}{E(0)}\right) &= N \cdot \ln(0,813), \\ N &= \frac{\ln\left(\frac{E(N)}{E(0)}\right)}{\ln(0,813)} = \frac{\ln\left(\frac{0,025}{1,6 \cdot 10^6}\right)}{\ln(0,813)} = 86,8 \approx 87. \end{aligned}$$

Tehát átlagosan **87 ütközésre** van szükség a neutronok termalizálódásához. □

→ Természetesen bármilyen alapú logaritmussal számíthatunk.

$\langle P(1) \rangle = 4,63 \pm 0,85$

A „Csernobil” c. sorozatban a baleset után a sérült reaktor felett a levegőt kékes színben derengőnek tüntették fel a filmsorozat készítői.

- a) Okozhatja-e ezt a kékes színt Cserenkov-sugárzás? Számítsuk ki, hány eV energiájú elektron, illetve proton válthat ki Cserenkov-sugárzást a levegőben ($n \approx 1,0003$)!
- b) Milyen más fizikai folyamat okozhatja a levegő „színes derengését”?
- Az elektron nyugalmi tömege $m_e \approx 511 \text{ keV}/c^2$, a proton nyugalmi tömege $m_p \approx 938 \text{ MeV}/c^2$.

- a) Cserenkov-sugárzás akkor lehetséges, hogyha a közegben egy töltött részecske sebessége nagyobb, mint az adott közegben a fény sebessége. A küszöbértéknél kapjuk, hogy

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \geq \frac{1}{n}.$$

Innen a részecske (teljes) küszöbenergiájára kapjuk, hogy

$$E = \gamma m_0 c^2 \geq \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \approx m_0 c^2 \cdot 40,8.$$

A küszöbenergia elektronra $E_e \approx 20,86 \text{ MeV}$, a proton küszöbenergia $E_p \approx 38,3 \text{ GeV}$. Ilyen energiájú elektron és proton keletkezése egy atomreaktorban nagyon valószínűtlen. → Itt az egyszerűség kedvéért teljes energiát számítottunk, a mozgási energiához $(40,8 - 1)$ -el kellene szorozni, ami az eredményt érdemben nem változtatja meg. Ha valaki így számol, az is teljes pontot ér. Ekkor $E_{e,m} \approx 20,35 \text{ MeV}$ és $E_{p,m} \approx 37,3 \text{ GeV}$.

- b) A levegő részecskéinek **gerjesztése** és/vagy ionizációja (pontosabban a **rekombináció**) vezethet fénykibocsátáshoz. Ennek természetes példája pl. a sarki fény, ahol a napszél töltött részecskéi hatnak kölcsön a légkörrel. A levegőt alkotó molekulák és atomok elektronjainak ilyen jellegű gerjesztéséhez vagy ionizációjához csupán eV nagyságrendű energiák szükségesek. Ekkora energiák sokkal könnyebben elérhetők pl. radioaktív bomlás eredményeként is. $\square$

$$\langle P(2) \rangle = 3,63 \pm 1,30$$

A ^{238}Pu alfa-sugárzó, felezési ideje 88 év. A radioizotópos termoelektromos generátorok (RTG) hőforrásként használják, amelyek bizonyos űreszközök működtetésére szolgálnak. Egy jövőbeli, nagy sebességű űrszonda PuO_2 -t tartalmazó RTG-t vitt magával egy 20 évig tartó küldetésre. Miután visszatért a Földre, meg akarták tudni, hogy mekkora sebességgel haladt, és arra gondoltak, hogy megméri a PuO_2 aktivitását, és összevetik a Földön maradt, ugyanolyan tartalék generátoréval. Eredményül azt kapták, hogy a két aktivitás aránya $A_{\text{szonda}}/A_{\text{Föld}} = 1,023$. Mekkora volt a szonda sebessége? (Tegyük fel, hogy a szonda végig ugyanazzal a sebességgel haladt, a gyorsítás-lassítás pillanatszerű volt.)

Az űrszondán nagy sebessége miatt máshogy telt az idő, mint a Földön (íkerparadoxon). Az aktivitások arányából meghatározhatjuk az időkülönbséget, abból pedig a sebességet.

$$\frac{N_{\text{sz}}}{N_{\text{F}}} = 1,023 = \frac{N_0 \cdot 2^{-t_{\text{sz}}/T_{1/2}}}{N_0 \cdot 2^{-t_{\text{f}}/T_{1/2}}} = \frac{2^{-t_{\text{sz}}/T_{1/2}}}{0,854}.$$

Innen átrendezve, logaritmust véve, és ismét rendezve kapjuk, hogy

$$t_{\text{sz}} = -T_{1/2} \frac{\ln(1,023 \cdot 0,854)}{\ln(2)} = 0,1943 \cdot 88 \text{ év} \approx 17,1 \text{ év}.$$

Az idődilatáció egyenletéből

$$t_F = \frac{t_{sz}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{17,1^2}{20^2}} \approx \textcolor{red}{0,52}c \approx 1,56 \cdot 10^8 \text{ m/s. } \square$$

$$\langle P(3) \rangle = 4,30 \pm 1,49$$

Egy 120 V feszültséggel és 0,5 A áramerősséggel működő izzólámpa izzószála (kiegyenesítve) 58 cm hosszú és 0,046 mm átmérőjű. Mekkora lehet az izzószál hőmérséklete, ha a szürkességző wolfram szál abszorpciós tényezője és emisszivitása egyaránt 0,35?

(Az izzószál hősugárzás-elnyelését, és a hővezetést hanyagoljuk el.)

Az izzólámpa által disszipált teljesítmény $P = UI = 60 \text{ W}$.

Az izzószál 2000 – 3000 K üzemi hőmérsékletén a hővesztesége túlnyomó részben hősugárzással történik, ezért a Stefan–Boltzmann törvény segítségével jól becsülhetjük a hőmérsékletét.

Az izzószál henger alakú, a palást A felületén keresztül sugároz hőt:

$$A = d\pi\ell = 8,382 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Kirchhoff hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó törvénye alapján egy abszolút fekete test E emisszióképesége és egy ugyanolyan hőmérsékletű szürkességző e emisszióképesége között az alábbi kapcsolat van: $e/a = E$, ahol $0 \leq a \leq 1$ a szürkességző abszorpcióképesége / emisszivitása. Az abszolút fekete testekre vonatkozó Stefan–Boltzmann-törvény:

$$E = \frac{e}{a} = \frac{P}{Aa} = \sigma T^4,$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{Aa\sigma}} = 2451 \text{ K.} \quad \square$$

$\langle P(4) \rangle = 4,23 \pm 1,25$

Egy szabad elektron mozgási energiája 10 keV. Egy vele szemben jövő foton ütközik az elektronnal; az elektron az ütközés után megáll.

- Mekkora a foton hullámhossza az ütközés előtt és után?
- Energiájuk/hullámhosszuk alapján milyen tartományba esik a beeső és a szórt foton? (Mivel az elektron mozgási energiája jóval kisebb a nyugalmi energiájánál, nem szükséges relativisztikusan számítani.)

- Írjuk fel a lendület- és energiamegmaradás mérlegegyenleteit! Itt figyelembe vesszük, hogy a lendületmegmaradás miatt a foton csak 180° -os szóródást szenvedhetett, azaz a szórt foton a beeső fotonnal ellentétes irányban halad:

$$p_e - \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'},$$

$$\frac{p_e^2}{2m_e} + \frac{h}{\lambda}c = \frac{h}{\lambda'}c.$$

A 2. egyenletet c -vel leosztva, majd kivonva belőle az első egyenletet, kapjuk, hogy

$$\frac{p_e^2}{2m_e c} - p_e + \frac{2h}{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \frac{2h}{p_e - \frac{p_e^2}{2m_e c}} = \frac{2h}{\sqrt{2m_e E_e} - \frac{E_e}{c}} = 2,722 \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

a) A beeső foton energiája:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 7,297 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 45,5 \text{ keV}.$$

A szórt foton energiája 10 keV-tal *nagyobb*, hiszen az elektron csak a fotonnak adhatta le mozgási energiáját: $E' = E + 10 \text{ keV} = 55,5 \text{ keV} = 8,900 \cdot 10^{-15} \text{ J}$. Innen a szórt foton hullámhossza:

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = 2,232 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

b) Mindkét fotonra igaz, hogy energiájuk 4 nagyságrenddel nagyobb, hullámhosszuk 4 nagyságrenddel kisebb, mint a látható fény fotonjaié (néhány eV ill. néhány nm), ezért mindkét foton **röntgenfoton**. $\square$

$$\langle P(5) \rangle = 2,67 \pm 1,40$$

A beeső röntgenfotonok irányában kiütött Compton-elektronokra vonatkozó zárófeszültség 50 kV.

- Hány százalékkal tér el az elektron relativisztikusan számított lendülete a klasszikusan számítottól?
- Mekkora a beeső röntgensugarak energiája és hullámhossza?

- A zárófeszültség 50 kV, ez azt jelenti, hogy a kilökött elektronok energiája $E_e = 50$ keV. Felírhatjuk a relativisztikus energia formulát:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2,$$

ahol $E = E_m + E_0 = E_m + m_0 c^2 = 50$ keV + 511 keV = 561 keV a részecske teljes (mozgási + nyugalmi) energiája.

Innen a relativisztikusan számított lendület a fenti formula átrendezésével

$$p = \frac{\sqrt{(561 \text{ keV})^2 - (511 \text{ keV})^2}}{c} \approx 231,52 \text{ keV}/c.$$

Klasszikusan számítva

$$E_m = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \implies p = \sqrt{2m_e E_m} = \sqrt{2 \cdot 511 \text{ keV}/c^2 \cdot 50 \text{ keV}} \approx 226,05 \text{ keV}/c.$$

A kettő aránya $231,52/226,05 \approx 1,024$, tehát a relativisztikus lendület kb. **2,4%**-al nagyobb.

- a) A fentiekből levezethető az általános képlet is, azaz

$$\frac{p_{\text{rel}}}{p_{\text{kl}}} = \sqrt{1 + \frac{E_{\text{m}}}{2E_0}} \approx 1,024.$$

- b) A lendületmegmaradás miatt, ha az elektronok a beeső fotonok irányában lépnek ki, akkor a szórt fotonok csak a beesési iránnyal ellentétes irányban szóródhatnak, azaz a szórási szög 180° . Így minden lendület egy egyenesbe esik. A beeső foton lendülete E/c , a szórt fotoné $-E'/c$, a kilökött elektroné p_e , ezekkel a lendületmegmaradás könnyen felírható:

$$\frac{E}{c} = p_e - \frac{E'}{c}.$$

Az energiamegmaradás miatt $E' = E - E_e$, így

$$\frac{E}{c} = p_e - \frac{E - E_e}{c}$$

$$E = cp_e - E + E_e$$

$$E = \frac{1}{2} (E_e + cp_e) = 2,255 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 140,8 \text{ keV} \longrightarrow 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ m},$$

$$E' = E - E_e = 0,801 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 90,8 \text{ keV} \longrightarrow 1,37 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad \square$$

$\langle P(6) \rangle = 1,97 \pm 1,50$

Egy cézium-katódos fotocellát $\lambda = 535$ nm hullámhosszúságú látható fénnel világítunk meg.

- Mekkora a katódból kilépő elektronok maximális energiája?
- Léteznek a kilépő elektronok között olyanok is, melyeknek de Broglie hullámhossza éppen megegyezik a megvilágító fény hullámhosszával (535 nm). Ezek az elektronok az ellentér mekkora U feszültségénél fékeződnek le?
- Röviden indokoljuk meg, miért léteznek a kilépő elektronok között ilyenek is!

Adatok: Planck állandó: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js, fénysebesség $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, a cézium határhullámhossza $\lambda_h = 635$ nm, az elektron nyugalmi tömege $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

- A fotoeffektus Einstein-féle egyenlete (függvénytábla):

$$hf = W_{\text{ki}} + \frac{mv^2}{2},$$

ahol $mv^2/2 = E_{\text{max}}$ a kilépő elektronok (legnagyobb megfigyelhető) mozgási energiája. Kihasználva, hogy a kilépési munka felírható a határhullámhosszal ($W_{\text{ki}} = hc/\lambda_h$)

$$E_{\text{max}} = \frac{hc}{\lambda} - W_{\text{ki}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_h} = \frac{hc(\lambda_h - \lambda)}{\lambda \cdot \lambda_h} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{535 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 635 \cdot 10^{-9} \text{ m}} =$$

$$\approx 5,85 \cdot 10^{-20} \text{ J} \approx 0,37 \text{ eV}.$$

- b) Számítsuk ki, hogy mekkora az 535 nm de Broglie hullámhosszú elektron mozgási energiája:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot 2m} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{(535 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2 \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 8,44 \cdot 10^{-25} \text{ J} \approx 5,27 \cdot 10^{-6} \text{ eV},$$

ezért az ellentér értéke $\approx -5,27 \mu\text{V}$.

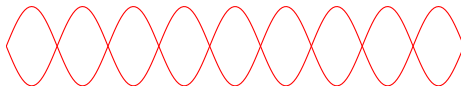
- c) A fotocella áramerősség – fékezőfeszültség függvénye folytonosan csökkenő, ami azt jelenti, hogy már a legkisebb fékező feszültség hatására is vannak olyan kis energiájú kilépő elektronok, melyek lefékeződnek az ellentérben.

Másképpen: az Einstein-féle fényelektromos egyenlet csak a kilépő elektronok *maximális* energiáját adja meg – ennél kisebb energiájú elektronok is ki fognak lépni, mert az elektronok veszíthetnek energiát a kilépés előtt, az anyag belsejében is. $\square$

$$\langle P(7) \rangle = 3,53 \pm 1,14$$

Mutassuk meg az egydimenziós húrmodell felhasználásával, hogy a fémekben a legrövidebb hullámhosszúságú elektronok hullámhossza a d rácsállandó nagyságrendjébe esik! (Az L hosszúságú húron legyen N darab fématom (ion) egymástól d távolságra, és N darab szabad elektron, melyek állóhullámokként helyezkednek el az L hosszon.)

Épüljön fel a húr N atomból! Ekkor a Pauli-elv szerint a legalsó $N/2$ számú energiaszintek vannak betöltve két-két elektronnal.



Tehát a $k = N/2 - 1$ csomós állapot a legmagasabb energiájú betöltött állapot, azaz $k + 1 = N/2$.

A húr $L = Nd$ hossza kifejezhető a csomók számával és a hullámhosszal:

$$L = N \cdot d = (k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Innen N -el egyszerűsítve és 4-el szorozva egyből kapjuk, hogy a hullámhossz $\lambda = 4d$, azaz a legrövidebb hullámhossz a rácsállandó négyszerese. $\square$

$$\langle P(J8) \rangle = 2,50 \pm 1,78$$

A levegő harmadik leggyakoribb összetevője az argon.

a) Mekkora a szobahőmérsékletű (23°C) levegőben egy ^{40}Ar atom átlagos mozgási energiája?

b) Mekkora az átlagos energiájú argon atom de Broglie-hullámhossza?

a) Az argon nemesgáz, egyatomos gáz. Az atom tömege:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{0,04 \text{ kg/mol}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}} = 6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Az atom a tér 3 tengelye mentén 3 független transzlációs szabadsági fokkal rendelkezik. Az ekvipartíció elve alapján minden szabadsági fokra átlagosan ugyanannyi energia, $kT/2$ jut, ahol k a Boltzmann-állandó. Így az átlagos mozgási energia:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT = 1,5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 296 = 6,13 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

b) az atom átlagos mozgási energiájához tartozó sebessége:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 296 \text{ K}}{6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} = 430 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A de Broglie-hullámhossz: $\lambda = h/(mv)$. Ezzel:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 430 \text{ m/s}} = 2,32 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad \square$$

Megjegyzés: a kapott sebesség nem az *átlagos sebesség*, hanem az *átlagos mozgási energiához tartozó sebesség* (négyzetes középsebesség). Az átlagos sebesség a Maxwell-Boltzmann sebességeloszlásból:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

ami a fenti négyzetes középsebességnél kb. 8%-kal kisebb értéket ad.

$$\langle P(J9) \rangle = 3,50 \pm 1,84$$

Földünk közel 4,5 milliárd éves. Becsüljük meg, hogy a Föld kialakulásakor milyen arányban lehettek jelen a természetes uránban a 235-ös és a 238-as tömegszámú izotópok atomjai!

Adatok: napjainkban a két izotóp gyakoriságaránya $N_{238} : N_{235} \approx 140 : 1$. A két izotóp felezési ideje: $T_{235} = 7,04 \cdot 10^8$ év, $T_{238} = 4,47 \cdot 10^9$ év.

A két izotóp aránya $t = 4,5 \cdot 10^9$ év elteltével

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = \frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln(2)}{T_{235}} t}}{e^{-\frac{\ln(2)}{T_{238}} t}} = \frac{1}{140}.$$

Átrendezve az egyenletet

$$\frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} = \frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln(2)}{T_{238}} t}}{e^{-\frac{\ln(2)}{T_{235}} t}} \approx 0,3 \qquad \frac{N_{235}(0)}{N_{235}(0) + N_{238}(0)} \approx \frac{3}{3 + 140} \approx 0,23. \quad \square$$

→ Mindkét arányt elfogadtuk megoldásnak, amíg egyértelmű, hogy melyikről van szó.

$\langle P(J10) \rangle = 4,90 \pm 0,32$

Egy adott pillanatban az A alapállapotú hidrogénatom ütközik egy másik, éppen álló, alapállapotú B atommal. (Tegyük fel, hogy az ütközés centrális és egyenes.)

- Legfeljebb mekkora $E_m < E_0$ mozgási energiája lehet a mozgó A atomnak, hogy az ütközés biztosan rugalmas legyen?
- A rugalmatlan ütközés esetén, amikor az A atom energiája éppen $E_m = E_0$, a gerjesztett atom milyen hullámhosszúságú fotont bocsát ki a későbbi legerjesztődéskor? (Tegyük fel, hogy az ütközéskor csak az egyik alapállapotú atom fog gerjesztődni.)
- A H-atom melyik színeképsorozatához tartozik a kibocsátott fénykvantum színeképvonala, és látható-e ez a vonal?

Adatok: az alapállapotú H atom energiája $E_H = -13,6$ eV.

- Az ütközés akkor válhat rugalmatlanná, ha a mozgó A atom annyi ΔE energiát ad le, amely elegendő ahhoz, hogy valamelyik atom gerjesztődjön. Alapállapotból a gerjesztéshez szükséges minimális energia:

$$E_g = 13,6 \text{ eV} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10,2 \text{ eV}.$$

A rugalmatlan ütközésben is teljesülnie kell a lendületmegmaradásnak, azaz a két H atomnak együtt kell tovább mozognia, a kezdetben mozgó atom sebességének felével. Ezt figyelembe véve az energiamérleg

$$\frac{p^2}{2m} = 2 \frac{(p/2)^2}{2m} + \Delta E \quad \implies \quad \Delta E = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{2m}.$$

- a) A korábbiakat folytatva

$$E_m = 2\Delta E = 2E_g = 20,4 \text{ eV}.$$

Ha a mozgási energia a E_g gerjesztési energia kétszeresét eléri, akkor létrejöhet a rugalmatlan ütközés, ha viszont annál kisebb, akkor nem teljesülhet egyszerre a lendület- és az energiamegmaradás. Az ütközés tehát csak akkor marad biztosan rugalmas, ha $E_m < 20,4 \text{ eV}$.

- b) Az $E_m = 2E_g = 20,4 \text{ eV}$ határesetben az egyik hidrogénatom az alapállapotból ($n = 1$) az első gerjesztett állapotba ($n = 2$) kerül, ahonnan foton kibocsátásával legerjesztődik. A kibocsátott foton hullámhossza:

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10,2 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1,216 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 121,6 \text{ nm}.$$

- c) Ez az a színeképsorozat, ami során az elektron $n \geq 2$ állapotból $n = 1$ alapállapotba kerül (Lyman-sorozat). A jelen esetben a színeképsor első vonaláról van szó, ami nem a látható ($\approx 380 \text{ nm} - \approx 780 \text{ nm}$) tartományba esik, hanem az UV-ba. $\square$

$\langle P(S8) \rangle = 2,15 \pm 1,39$

1987. február 24-én felfedeztek egy szupernóvát, amit SN 1987A-nak neveztek el. A szupernóva 168 000 fényév távolságra van a Földtől. Egy nappal korábbi felvételeket elemezve, észrevették, hogy már február 23-án is elkezdett felfényleni. Különösen érdekes, hogy ez volt az első eset, hogy nemcsak optikai úton sikerült a szupernóvát érzékelni, hanem három földi neutrínó detektorral is egyszerre észlelték a szupernova-robbanás által keltett neutrínó-fluxust 1987. február 23-án. Gondolat kísérletként tegyük fel a következőket: a 10 MeV energiájú neutrínók 7 másodperccel később értek a Földre, mint a velük azonos időpillanatban indult fotonok.

Milyen becslést lehet adni ebből a neutrínók tömegére?

(Ha $x \ll 1$, használhatjuk a következő közelítést: $1/(1+x) \approx 1-x$.)

A feladat szerint a két részecske érkezési ideje között 7 másodperc telik el, azaz a neutrínók sebessége kicsit elmarad a fény sebességétől. Ezért a neutrínó sebességére felírhatjuk:

$$v = \frac{c \cdot t}{t + \Delta t} \implies \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{t}} \approx 1 - \frac{\Delta t}{t},$$

ahol kihasználtuk a feladatban adott közelítést, mivel $\Delta t/t \ll 1$.

A részecske teljes energiájára felírható, hogy

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

A relativisztikus energia képletet átrendezve

$$m_0 c^2 = E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = E \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right)^2} = E \cdot \sqrt{2 \frac{\Delta t}{t} - \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}.$$

Mivel $\Delta t = 7$ s és $t = 168\,000 \cdot 365,24 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 5,3 \cdot 10^{12}$ s, $\Delta t/t \approx 1,32 \cdot 10^{-12}$. Mivel a hányados ilyen kicsi, négyzete újabb 12 nagyságrenddel kisebb lesz, ezért a másodfokú tagot elhagyhatjuk a gyök alatt, így végül kapjuk:

$$m_0 c^2 \approx E \cdot \sqrt{2 \frac{\Delta t}{t}} = 1 \cdot 10^7 \text{ eV} \sqrt{2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-12}} \approx 16,25 \text{ eV}. \quad \square$$

→ A feladat egy gondolatkísérlet; az elfogadott szupernóva-modell szerint a fény és a neutrínók nem (ennyire pontosan) egyszerre indulnak el. Ennek megfelelően a tényleges csillagászati és a neutrínó-észlelések sem ilyen pontosan egy időben történtek.

$\langle P(S9) \rangle = 2,85 \pm 2,25$

Egy erőmentes, kocka alakú dobozban elektront, illetve elektronokat helyezünk el. Alapállapotban mekkora nyomást fejt ki az L élhosszúságú kocka lapjaira a dobozban „nyüzsgő”

- egy elektron, illetve
- három elektron? Ez utóbbi esetben a kocka minden oldalára azonos nyomás hat?

- A húrmodell alapján az elektron energiája a kocka alakú dobozban

$$E = \frac{h^2}{8m_e} \cdot \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2} \right),$$

ahol alapállapotban egy elektron esetén $n_x = n_y = n_z = 1$.

A nyomás kiszámításához képzeletben nyomjuk össze a dobozt x -irányban Δx távolsággal. Az ehhez szükséges munka (a másik két irányból származó energia nem változik):

$$W = \frac{h^2}{8m_e} \cdot \left(\frac{1}{(L - \Delta x)^2} - \frac{1}{L^2} \right) = \frac{h^2}{8m_e} \cdot \frac{L^2 - L^2 + 2L\Delta x - (\Delta x)^2}{L^2(L - \Delta x)^2}.$$

Kihasználva, hogy $\Delta x \ll L$:

$$W \approx \frac{h^2}{4m_e} \cdot \frac{\Delta x}{L^3}.$$

a) A doboz összenyomásakor kifejtett erő:

$$F = \frac{W}{\Delta x} = \frac{h^2}{4m_e} \cdot \frac{1}{L^3}.$$

A nyomás innen az oldal L^2 területének figyelembe vételével számítható:

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{h^2}{4m_e} \cdot \frac{1}{L^5}.$$

b) Három elektron esetén két elektron az (1,1,1) állapotban, míg a harmadik elektron az (1,1,2), (1,2,1) és (2,1,1) állapotok valamelyikében fog tartózkodni, vagyis az összenyomáshoz szükséges munka (illetve az alternatív megoldásban az erők összege) az egy elektronhoz képest az összenyomás irányától függően $3 \cdot 1^2 = 3$, illetve $(2 \cdot 1^2 + 2^2) = 6$ -szorosára fog változni. Mivel a kapott nyomás a fentiek szerint egyenesen arányos a szükséges munkával, ezért a doboz falaira kifejtett nyomás is ettől függően **3**, illetve **6**-szorosa lesz az egy elektron által kifejtett nyomásnak. $\square$

$$\langle P(S10) \rangle = 1,65 \pm 1,35$$