

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 2024 Döntő Elméleti feladatok megoldásai

Papp Gergely & Tarján Péter

Max Planck Plazmafizika Intézet (München) & Nyíregyházi Egyetem
gergely.papp@ipp.mpg.de, tarjan.peter@nye.hu

2024-04-21



Milyen három tulajdonsága kell legyen egy anyagnak, hogy jól lehessen használni atomreaktorban moderátornak?

- a) Kis tömegszámú kell legyen, hogy nagy energiát tudjon átvenni a neutrontól egy ütközésben.
- b) Nagy valószínűsége (makroszkopikus hatáskeresztmetszete) kell legyen a rugalmas ütközésnek. Ez magfizikai tulajdonság is, de a magsűrűségnek is elég nagynek kell lenni – például ezért nem jók a gáz halmazállapotú anyagok.
- c) Kis valószínűséggel (makroszkopikus hatáskeresztmetszettel) nyelje el a neutronokat. Ez szintén mind magfizikai tulajdonság, mind a magsűrűség kérdése. $\square$

$$\langle P(1) \rangle = P1 \pm d1$$

A ^{56}Fe izotópnak a legkisebb az egy nukleonra vetített tömege (M/A). De nem ebben az izotópban a legnagyobb az egy nukleonra eső kötési energia ($|E|/A$), hanem a ^{62}Ni -ben.

- Az univerzum története során hol keletkezhet(ett) ^{56}Fe , és hasonló, közepes tömegszámú magok?
- Miért lehet a ^{56}Fe gyakoribb, mint a nála erősebben kötött ^{62}Ni és ^{58}Fe ?

- A közepes tömegszámú magok nehéz csillagokban és szupernovákban tudnak keletkezni.
- A csillagokban a proton-proton ciklus során nagy mennyiségben keletkezik ^4He . Ha a csillag elég nagy, úgy a hidrogén üzemanyag fogytával további fúziós reakciók során ^4He magok egymással (pl. $3 \times ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$), illetve más nehezebb magokkal történő fúziója során (pl. $^{12}\text{C} + ^4\text{He} \rightarrow ^{16}\text{O}$, stb) egyre nehezebb magok keletkeznek. Ezen folyamatokban olyan magok keletkezése a legvalószínűbb, amiknek tömegszáma a 4 többszöröse. A felsorolt magok közül csak az 56 osztható 4-el, ami végeredményben 14 darab ^4He -ből épül fel. □

Megjegyzés: Technikailag először radioaktív ^{56}Ni keletkezik, ami előbb ^{56}Co -ra, majd a stabil ^{56}Fe -ra bomlik. A bomlás folyamata kimutatható szupernovák fényének vizsgálatából. A fúziós reakciók és foton-indukált magreakciók egyensúlya miatt a nehéz csillagok és szupernovák nukleoszintézise részleteiben bonyolultabb, mint az itteni egyszerűsített magyarázat.

$$\langle P(2) \rangle = P2 \pm d2$$

Egy 1332,5 keV energiájú γ -foton (^{60}Co forrás) párkeltést hoz létre egy ^{54}Fe atommag közelében. Az elektron és pozitron a γ -foton beérkezési irányára merőlegesen indul el.

a) Hány eV energiát visz el a párkeltés során meglökött atommag?

b) Hány eV a keletkezett elektron és pozitron mozgási energiája?

Adatok: Az elektron tömege $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$, $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$, $M(^{54}\text{Fe}) \approx 54 \text{ u}$.

a) A rendszerben a foton irányára merőleges lendület nulla. A merőlegességi feltételből és a lendületmegmaradásból következik, hogy az elektron-pozitron pár egymással pontosan ellentétes irányban indul el. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket olyan módon, hogy az y -tengely a γ -foton haladási irányába essen.

Jelöljük a γ -foton energiáját E_γ -val, lendületét p_γ -val. Mivel $p_{\gamma,x} = 0$, ezért az elektron és pozitron lendületének nagysága, és így mozgási energiája is megegyezik: $|p_-| = |p_+|$, $E_- = E_+ = E_m$. Mivel $E_\gamma \ll M_{\text{Fe}} c^2$, ezért nem szükséges relativisztikusan számolni. Az atommag párkeltés utáni lendülete számítható a lendületmegmaradásból:

$$p_{\text{Fe}} = p_\gamma = E_\gamma / c.$$

A párkeltés során meglökött atommag által elvitt mozgási energia:

$$E_{\text{Fe}} = \frac{p_{\text{Fe}}^2}{2m_{\text{Fe}}} = \frac{E_\gamma^2}{2m_{\text{Fe}} c^2} = \frac{(1,3325 \cdot 10^6 \text{ eV})^2}{2 \cdot 54 \cdot 9,315 \cdot 10^8 \text{ eV}/c^2 \cdot c^2} \approx 17,65 \text{ eV}.$$

- b) Az elektron és pozitron a γ -foton energiájának atommag által elvitt mozgási energiával, valamint az elektron és pozitron nyugalmi energiájával csökkentett energiáján osztoznak egyenlő arányban:

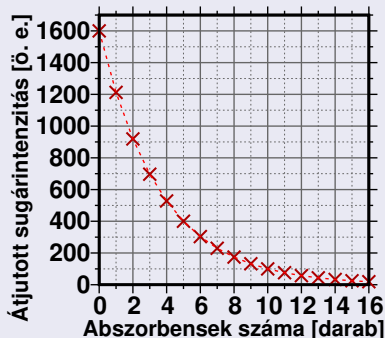
$$E_m = \frac{1}{2} (E_\gamma - E_{\text{Fe}} - 2m_e c^2) = 0,5 \cdot (1332,5 - 0,01765 - 2 \cdot 511) \text{ keV} \approx 155,24 \text{ keV}.$$

Megjegyzés: A meglökődési energia kicsi, de nem említése elvi hiba. Ha a diák expliciten írja hogy elhanyagolhatóan kicsi, úgy nincs pontlevonás. $\square$

$$\langle P(3) \rangle = P3 \pm d3$$

A mellékelt grafikon egy β -forrás sugárzásának gyengülését mutatja egyre több rétegű abszorbensen való áthaladás után. A vízszintes tengelyen az abszorbens lemezek darabszáma van megadva, a függőlegesen a lemezeken átjutott sugárintenzitás (normált - önkényes egység). Egy lemez felületi sűrűsége (a lemez alakú abszorbens tömege osztva a területével) 9 mg/cm^2 .

- Mekkora felületi sűrűségű abszorbens után csökken a felére az eredeti intenzitás?
- Az abszorbensen átjutó sugárzásintenzitás milyen függvénye az abszorbens vastagságának?
- Milyen kémiai elemet használtunk abszorbensként, ha az eredeti intenzitás 16-od részére csökkentéséhez szükséges vastagság $0,33 \text{ mm}$?



- a) A kezdeti intenzitás a grafikonról leolvasva kb. 1600 (önkéntes egység). Ennek a fele 800, ez a vízszintes tengelyen kb. $2,5 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$ -nél van. A felezési rétegvastagság így

$$d_{1/2} = 0,0225 \text{ g/cm}^2.$$

- b) **Exponenciálisan csökkenő.** Ez belátható abból, hogy a görbén tetszőleges pontból indulva mindig ugyanakkora vastagság ($2,5$ lemez) kell a feleződéshez.

- c) Az eredeti intenzitás $1/16$ -a 100 (önkéntes egység). Ehhez (a görbéről leolvasva)
 $d = 10 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2 = 0,09 \text{ g/cm}^2$ tartozik. Az abszorbens felületi sűrűségére felírható:

$$d = \frac{m}{A} = \frac{\rho \cdot V}{A} = \rho \cdot x,$$

ahol ρ , A és x rendre az abszorbens sűrűsége, területe és vastagsága.
 A sűrűséget kifejezve és a megadott vastagságot behelyettesítve:

$$\rho = \frac{d}{x} = \frac{0,09 \text{ g/cm}^2}{0,033 \text{ cm}} \approx 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

ami a szobahőmérsékleten szilárd elemek közül az **alumínium** sűrűségéhez áll legközelebb.



$\langle P(4) \rangle = P4 \pm d4$

Egy lezárt dobozban ötvözetet helyeztek el, amely kétfajta, azonos anyagmennyiségű (azonos számú atomot tartalmazó) fémből készült. Mindkét fém radioaktív, az egyik (A) felezési ideje 10 év, a másiké (B) 20 év. Amikor pár év múlva a dobozt kibontották, és az ötvözetet elemezték, az A és B fém anyagmennyiségeinek aránya továbbra is azonos (1:1) volt. Hogyan lehetséges ez? (Feltevésünket igazoljuk levezetéssel.)

Az (A) fém gyorsabban bomlik, mint a (B). Ha ezek egymástól függetlenül bomlanának, akkor nem maradhatna az arányuk ugyanaz. Az a hipotézisünk, hogy **a lassabban bomló (B) anyagból éppen az (A) anyag keletkezik**. Jelöljük λ_A -val az (A) anyag, λ_B -vel a (B) anyag bomlási állandóját, és legyen N mindkét anyagból kezdetben meglévő atommagok száma (a feladat szerint ezek egyenlők). Ekkor Δt idő alatt az anyagmennyiségek megváltozása:

$$\Delta N_B = -\lambda_B N \Delta t,$$

$$\Delta N_A = (\lambda_B - \lambda_A) N \Delta t,$$

ahol az első egyenlet a (B) bomlását, a második pedig az (A) bomlását és (B)-ből való keletkezését fejezi ki. Ahhoz, hogy az arányok állandók maradjanak, az szükséges, hogy a megváltozott atomszámok aránya is ugyanolyan legyen, mint a kezdeti mennyiségek aránya:

$$\frac{N - \Delta N_B}{N - \Delta N_A} = 1 \implies \Delta N_B = \Delta N_A \implies \lambda_B = \lambda_A - \lambda_B.$$

A felezési idők aránya miatt $\lambda_A = 2\lambda_B$. Ezt behelyettesítve kapjuk: $\lambda_B = 2\lambda_B - \lambda_B$. $\square$

$\langle P(5) \rangle = P5 \pm d5$

Egy neutron és egy proton nyugalmi állapotban befogáson mehet keresztül: $p + n \rightarrow D + \gamma$.
 A felszabadult energia hányad részét viszi el a meglökött deuteron? Adatok: $m_p = 1,67262 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_n = 1,67493 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_D = 3,34358 \cdot 10^{-27}$ kg (deuteron), $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

A reakció során felszabaduló energia:

$$E = (m_p + m_n - m_D) \cdot c^2 \approx$$

$$\approx \underbrace{(1,67262 + 1,67493 - 3,34358)}_{0,00397} \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 3,573 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Írjuk fel az energiamegmaradást a folyamatra:

$$\frac{p^2}{2m_D} + pc = E.$$

Ez egy másodfokú egyenlet a p lendület abszolút értékére, ami mindkét részecskére ugyanaz (lendületmegmaradás). A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva:

$$0 = p^2 + p \cdot 2m_D c - 2m_D E,$$

$$p_{12} = \frac{-2m_D c \pm \sqrt{4m_D^2 c^2 + 8m_D E}}{2} = \frac{-2m_D c \pm 2m_D c \sqrt{1 + \frac{2E}{m_D c^2}}}{2}.$$

A keresett lendület-abszolútérték pozitív kell legyen, így csak a pozitív gyöknek van fizikai értelme.

Bevezetve a következő jelölést:

$$q = \frac{2E}{m_D c^2} = \frac{2 \cdot 3,573 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{3,34358 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} \approx 2,37 \cdot 10^{-3},$$

a részecskék lendületére kapjuk, hogy

$$p = m_D c \left(\sqrt{1 + q} - 1 \right) = 3,34358 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \left(\sqrt{1,00237} - 1 \right) \approx 1,188 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Ebből adódnak a részecskék energiái:

$$E_\gamma = pc = 1,188 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3,564 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 2,227 \text{ MeV},$$

$$E_D = \frac{p^2}{2m_D} = \frac{(1,188 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2 \cdot 3,34358 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 2,11 \cdot 10^{-16} \text{ J} \ll E_\gamma.$$

Végül a megreakció során a felszabadult E energiából a deuteronra jutó hányad

$$\frac{E_D}{E} = \frac{2,11 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{3,573 \cdot 10^{-13} \text{ J}} \approx 5,9 \cdot 10^{-4} = \mathbf{0,059\%}. \quad \square$$

Megjegyzés: A folyamat mérhető pl. napkitörések spektrumában. Az irodalmi gamma-foton energia 2,223 MeV. A deuteron meglökődési sebessége $p/m_D \approx 3,55 \cdot 10^5 \text{ m/s} \approx 0,00118c$, ami jelentős, de a fénysebességtől messze áll.

$\langle P(6) \rangle = P6 \pm d6$

A PET (Pozitron Emissziós Tomográf) vizsgálatokhoz gyakran alkalmazzák a fluor 18-as tömegszámú izotópját, amelyet a következő magreakcióval állítanak elő ciklotronban: $^{18}\text{O} + p \rightarrow ^{18}\text{F} + n$. A keletkező ^{18}F izotóp felezési ideje 109,6 perc. A Debreceni Egyetem PETtrace ciklotronja 16,5 MeV energiájú, 70 μA áramerősségű protonnyalábokat képes gyorsítani. Egy gyártási tételből előállított maximális aktivitás Debrecenben 185 GBq.

- Miért alkalmas a keletkezett izotóp PET vizsgálatokhoz?
 - Mekkora csökken le a minta aktivitása egy Budapestig tartó, 3 órás út alatt?
 - Tegyük fel, hogy a maximálisan előállítható aktivitást a ^{18}F folyamatos bomlása korlátozza – a maximális aktivitáson a minta telítésbe megy, a gyártás és bomlás egyensúlyba kerül. Becsüljük meg, hogy a felgyorsított protonok mekkora hányada vesz részt a kívánt magreakcióban!
- Az ^{18}O mag 8 protont és 10 neutron tartalmaz. A ciklotronban az egyik neutron protonra cserélik, amiből keletkezik a ^{18}F – 9 proton és 9 neutron, dupla páratlan atommag. A PET-hez olyan izotóp kell ami bomlásakor pozitront bocsát ki, vagyis pozitív béta-bomló. Ha a ^{18}F pozitív béta-bomláson megy keresztül, akkor egy pozitron és neutrínó kibocsátásával ^{18}O -ra alakul vissza. (Az ^{18}O egy a természetben (ritkán) előforduló, stabil izotóp.)
 - A 3 órás út végén az aktivitás a bomlástörvényből ($t/T = 180 \text{ perc}/109,6 \text{ perc} \approx 1,64$):

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/T} = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ Bq} \cdot 2^{-1,64} \approx 1,85 \cdot 10^{11} \text{ Bq} \cdot 0,32 \approx \mathbf{59,3 \text{ GBq}}.$$

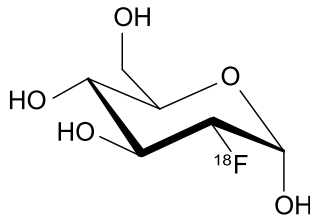
- c) Ha a minta maximális aktivitásánál a bomlás és keletkezés egyensúlyban van, úgy másodpercenként $N_r = 1,85 \cdot 10^{11}$ proton okoz kívánt magreakciót.
Ha a protonnyaláb áramerőssége $70 \mu\text{A}$, úgy abban másodpercenként

$$\frac{N_0}{1 \text{ s}} \approx \frac{70 \cdot 10^{-6} \text{ C/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 4,375 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

proton áramlik, a kettő aránya pedig

$$\eta = \frac{N_r}{N_0} = \frac{1,85 \cdot 10^{11}}{4,375 \cdot 10^{14}} \approx 0,000422 \approx 4,22 \cdot 10^{-4}. \quad \square$$

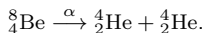
Megjegyzés: A ^{18}F -at egy $-\text{OH}$ csoport helyére építik be a 2-dezoxi-2- $[^{18}\text{F}]$ fluoro-D-glükózba. A $[^{18}\text{F}]$ FDG a D-glükózzal analóg módon jut be a sejtekbe aktív transzporttal. Az FDG szöveti eloszlásának ismeretében különböző fiziológias folyamatok és patológiás elváltozások vizsgálhatók a glükózfelhasználás mértékén keresztül. A bomlás után a fluor oxigénné alakul. Vizes környezetben felvesz egy protont és a molekula glükóz-6-á válik. Ez ártalmatlan, nem radioaktív, pusztán „nehéz oxigénnel” jelölt a hidroxilban a C-2 pozícióban. A 2-hidroxil új jelenléte lehetővé teszi, hogy normálisan lebomoljon (metabolizálódjon), ugyanúgy, mint a szokásos glükóz, és nem radioaktív végtermékeket termel.



$$\langle P(7) \rangle = P7 \pm d7$$

A ${}^8_4\text{Be}$ mag alfa-bomló. Mekkora a Be atom tömegközépponti rendszerében az alfa-részecske sebessége a bomlás után? Adatok: A ${}^8_4\text{Be}$ atommag tömege $8,0031 \text{ u} = 1,328948 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 7454,850 \text{ MeV}/c^2$, az alfa-részecskéé $4,0015 \text{ u} = 6,644657 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3727,379 \text{ MeV}/c^2$.

A ${}^8_4\text{Be}$ azon ritka könnyű magok egyike, ami alfa-bomlással bomlik – gyakorlatilag két alfa-részecskére esik szét:



A bomlásban felszabaduló energia a tömegek különbségéből számítható:

$$\Delta E = (m_{\text{Be}} - 2 \cdot m_{\alpha})c^2 \approx 1,49 \cdot 10^{-14} \text{ J} \approx 0,092^* \text{ MeV}.$$

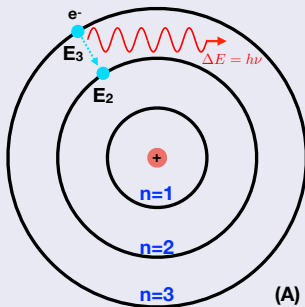
Az atom tömegközépponti rendszerében a bomlás során a lendületmegmaradás úgy teljesül, ha a két alfa-részecske egymással ellentétes irányban, azonos sebességgel repül szét. Ez azt jelenti, hogy a bomlásban felszabaduló energia fele-fele arányban oszlik el a két alfa-részecske között:

$$E_m = \frac{\Delta E}{2} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 \implies v = \sqrt{\frac{\Delta E}{m_{\alpha}}} \approx 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \square$$

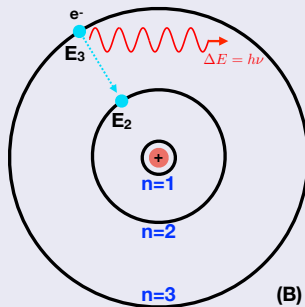
Megjegyzés: Az irodalmi adat $\Delta E = 91,8 \text{ keV}$ – a kis különbség miatt ügyelni kell az értékes tizedesjegyekre. (Természetesen az is jó megoldás, ha a versenyző a felszabaduló energiát a magok kötési energiájának különbségeként számolja ki, ez azonban hosszabb eljárás, amelynek során nagyobb a lehetőség a hibázásra.)

$$\langle P(J8) \rangle = PJ8 \pm dJ8$$

Tekintsük a csatolt két ábrát.



(A)



(B)

- Mekkora energiájú annak az elektromágneses hullámnak egy fotonja, amely a képeken látható átmenet során keletkezik egy H-atomban?
 - Mekkora a hullámhossza?
 - Hogyan aránylik a hullámhossz nagysága a H-atom $n = 3$ gerjesztett állapotának méretéhez?
 - A bal (A) vagy jobb oldali (B) ábra ábrázolja jobban a gerjesztett H-atom méretviszonyait?
- Adatok: Az alapállapotú hidrogénatom sugara $r_1 \approx 50 \text{ pm}$, energiája $E_a = -2,18 \text{ aJ}$, a vákuumbeli fénysebesség $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, a Planck-állandó $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$.

- a) Az első és második gerjesztett állapotok energiáira írhatjuk, hogy

$$E_n = \frac{E_a}{n^2} \implies E_2 = \frac{E_a}{4}, E_3 = \frac{E_a}{9}.$$

A kibocsátott foton energiája a kettő különbsége:

$$\mathcal{E} = |E_2 - E_3| = |E_a| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \approx \text{0,303 aJ}.$$

- b) A hullámhossz az energiából

$$\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}} \approx \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3,03 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2\text{kg/s}^2} = 6,56 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx \text{656 nm}.$$

Megjegyzés: Ez a híres Balmer-alfa, vagy H-alfa vonal, irodalmi értéke vákuumban 656,28 nm, ami **vörös** – mint az ábrán! ;)

- c) A sugár a főkvantumszámmal négyzetesen növekszik: $r_n = r_0 n^2$. A második és harmadik gerjesztett állapotú H atom sugara 4-szerese és 9-szerese az alapállapotnak, ami

$$r_2 = 4 \cdot 50 \text{ pm} = 200 \text{ pm} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

$$r_3 = 9 \cdot 50 \text{ pm} = 450 \text{ pm} = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

A foton hullámhossza **több mint ezerszerese (≈ 1458)** a gerjesztett H atomnak - ezt az ábra nem tükrözi. Nehéz is lenne ezt a méretkülönbséget egy ábrán méretarányosan megmutatni.

- d) A **jobb** oldali ábra ábrázolja jobban a méretviszonyokat ($r_n = r_0 n^2$). $\square$

$$\langle P(J9) \rangle = PJ9 \pm dJ9$$

A CERN LHC gyorsítójának ütköző nyalábjaiban elért jelenlegi rekordok: 6,5 TeV teljes energiájú protonok és 2,68 TeV *nukleononkénti* energiájú ^{208}Pb atommagok. Tételezzük fel, hogy az LHC gyűrűje pontosan kör alakú, és annak 26 659 m hosszúságú kerülete mentén végig ugyanakkora a mágneses tér nagysága!

- Legalább mekkora legyen ez a mágneses tér, hogy a fenti energiájú részecskéket pályán tudja tartani?
- A valóságban ennél nagyobb, 8,33 T erősségű tér létrehozására is képes szupravezető dipól-mágnesekre van szükség. Miért?

- Az eltérítő dipólmágnesek feladata a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erő biztosítása a Lorentz-erő révén:

$$QvB = m \frac{v^2}{r} \implies B = \frac{mv}{Qr} = \frac{p}{Qr}.$$

A körpálya sugara $26\,259\text{ m}/2\pi = 4243\text{ m}$. Az LHC által elért energiák bőven a relativisztikus tartományba esnek, hiszen egy nukleon nyugalmi energiája körülbelül $m_0 c^2 \approx 1\text{ GeV}$, ami nagyságrendekkel kisebb a teljes energiánál.

Ezért a relativisztikus energiaformulából felírható:

$$p^2 c^2 = E_t^2 - m_0^2 c^4 \approx E_t^2 \implies p \approx \frac{E}{c}.$$

a)

$$p \approx \frac{E}{c}.$$

$$p_p = 6,5 \frac{\text{TeV}}{c} = 3,47 \cdot 10^{-15} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p_{\text{Pb}} = 2,68 \frac{\text{TeV}}{c} \cdot 208 = 2,98 \cdot 10^{-13} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ezzel a szükséges mágneses indukció nagysága a két esetben:

$$B_p = \frac{p_p}{1e \cdot r} = 5,11 \text{ T},$$

$$B_{\text{Pb}} = \frac{p_{\text{Pb}}}{82e \cdot r} = 5,34 \text{ T}.$$

b) A valóságban az LHC **nem kör** alakú, hanem íves és egyenes szakaszokból áll. Az íves szakaszok görbületi sugara így nyilván kisebb, ezért erősebb térre van szükség. $\square$

$$\langle P(J10) \rangle = PJ10 \pm dJ10$$

A Föld felszínéről, függőlegesen felfelé, kilövünk egy lézersugarat a Holdra. Ezzel egy időben egy falu templomtornyából egy másik falu 16 km-re lévő templomtornyára is lézersugarat bocsátunk. Adjunk becslést a két esetre vonatkozóan a foton-molekula találkozások számának arányára!

Adatok: $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, a Föld felszínén a légnyomás $p \approx 10^5 \text{ Pa}$, ugyanitt a levegő sűrűsége $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$, a világűrben lévő molekulák térfogati sűrűségét vegyük nullának.

A foton-molekula találkozások számát arányosnak vehetjük egy adott, lézersugár tengelyű, kicsi A alapterületű hengerben lévő molekulák össztömegével. Itt A vehető a foton-molekula találkozások „hatáskeresztmetszetének”. Ezután csak azt kell megvizsgálni, hogy a Holdra menő lézersugár A alapterületű hengerében van nagyobb tömegű gázmennyiség, vagy a 16 km hosszúságú, földfelszínhez közeli, szintén A területű lézersugár hengerében.

A függőleges lézersugár fotonjainál a légkör molekuláit (N_2 , O_2 , stb) kell figyelembe venni, mivel a világűrben elhanyagolható a sűrűség. Az A területű földfelszín felett lévő függőleges levegőoszlop m_F tömegére a légnyomásból következtethetünk:

$$p = \frac{m_F g}{A} \implies m_F = \frac{pA}{g}.$$

A két torony közötti $L = 16 \text{ km}$ hosszúságú, A alapterületű vízszintes hengerben lévő m_V tömeget számíthatjuk a megadott sűrűségből:

$$m_V = AL\rho.$$

Kihasználva, hogy $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2/\text{m}^2 = 1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$, a kettő aránya

$$\frac{m_V}{m_F} = \frac{AL\rho}{\frac{pA}{g}} = \frac{L\rho g}{p} \approx \frac{16 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 1,29 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2}{10^5 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)} \approx 2,064 \approx 2.$$

Tehát a földi lézer-foton kb. kétszer annyi molekulával találkozik a Föld felszínén 16 km hosszon, mint a Holdra menő, a légkörön áthaladó foton esetében. $\square$

Megjegyzés: Ezért problémásabb Magyarország két távoli városa között (Szeged-Pécs) lézer jelet küldeni, mint a Holdra – tapasztalat: 2005 Einstein a fény éve.

$$\langle P(S8) \rangle = PS8 \pm dS8$$

1991. október 15-én az USA Utah államában lévő „Fly’s Eye” („légyszem”) detektor észlelte az addigi legnagyobb energiájú részecskét a kozmikus sugárzásban. Ezt a részecskét „Oh My God” (OMG) részecskének nevezték el, mivel az észlelésekor a kutatók így kiáltottak fel meglepetésükben. A részecske energiája $\approx 3,2 \cdot 10^{20}$ eV volt. Egy gondolat kísérlethez tegyük fel, hogy ez a részecske proton, és a Nagy Hadronütköztető (LHC) egyik $L = 14,3$ m hosszú eltérítő mágnesébe pontosan a hossz tengellyel párhuzamosan lép be. A mágneses tér nagysága $B = 8,33$ T.

- Hány méter lesz az eltérése az eredeti iránytól, amikor elhagyja a mágneset? Hasonlítsuk ezt össze a H-atom átmérőjével!
- Hány cm lenne az eltérés, ha ezt a részecskét nem protonnak, hanem elektronnak feltételezzük?

Ha a részecske az eltérítő mágnes hossz tengelyével pontosan párhuzamosan lépett be, akkor a mágneses térre pontosan merőlegesen halad. Mivel elektromosan töltött, ezért köríven fog haladni. A körpályán való mozgás centripetális erejét a Lorentz-erő biztosítja:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Ha a sebesség és a mágneses indukció merőlegesek egymásra, a sugár számítható az erők egyensúlyából:

$$\frac{\gamma m_0 v^2}{R} = qvB \implies R = \frac{p}{qB},$$

ahol p a részecske lendülete, és protonra $q = e$.

- a) Egy részecske energiája és lendülete közötti összefüggés

$$p^2 c^2 = E^2 - (m_0 c^2)^2.$$

Mivel $E \gg m_0 c^2$, ezért jó közelítéssel $p \approx E/c$, azaz

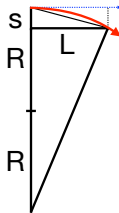
$$R = \frac{E}{qBc} = \frac{E [\text{eV}] \cdot e}{eBc} = \frac{E [\text{eV}]}{Bc} \approx \frac{3,2 \cdot 10^{20} \text{ V}}{8,33 \text{ Vs/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 1,28 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Ez a görbületi sugár, de a feladat az eltérülést kérdezi. Láthatjuk, hogy $R \gg L$, és az s eltérülésre szintén $R \gg s$. Így az eltérülés geometriájából írhatjuk (hasonló háromszögek), hogy

$$\frac{s}{L} = \frac{L}{2R - s} \approx \frac{L}{2R} \Rightarrow s = \frac{L^2}{2R} = \frac{(14,3 \text{ m})^2}{2 \cdot 1,28 \cdot 10^{11} \text{ m}} \approx 8 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Ez az eltérülés **az atomi méretek nagyságrendjébe esik**, az alapállapotú H-atom átmérője például $1,06 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Ez egyben azt is mutatja, hogy jogosak voltak a fenti elhanyagolások.

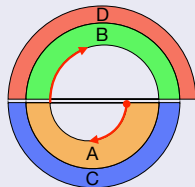
- b) Mivel a részecske energiája sok nagyságrenddel nagyobb, mint a nyugalmi tömege, ezért a részecske nyugalmi tömegének gyakorlatilag semmilyen szerepe sincs. Így az elektronra **jó közelítéssel ugyanezt** a mérhetetlenül kicsi értéket kapnánk. Ez az oka annak, hogy nehéz megállapítani azt, hogy milyen típusú is valójában egy ilyen óriási energiájú részecske. $\square$



$$\langle P(S9) \rangle = PS9 \pm dS9$$

Egy állandó mágneses terű ciklotronban gyorsuló részecske félkörívек sokaságát leírva egy kvázi spirál alakú pályán mozog. A két elektróda között átlépve a gyorsító elektromos térből energiát nyerve a pálya sugara minden lépésben megnő. Mutassuk meg, hogy bármely két szomszédos ív között közrezárt terület állandó! Az ábrán példaképpen néhány ilyen területet A–D betűkkel, és különböző színekkel jelöltünk. Tegyük fel, hogy a ciklotronrezonancia mindig egzaktul teljesül.

(A ciklotron elvét és a ciklotronrezonanciát először az idén 60 éve elhunyt Szilárd Leó írta le.)



A ciklotronban B térben gyorsuló m tömegű és q töltésű részecskék frekvenciáját (ciklotronfrekvencia) csak azok töltése és a mágneses tér határozza meg, hiszen a körpályán maradáshoz szükséges centripetális erőt a Lorentz-erő biztosítja:

$$\frac{mv^2}{r} = qBv \left(\implies f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \right).$$

Átrendezve kapjuk a körmozgást végző részecske sebességét és mozgási energiáját:

$$v (= 2\pi r f) = \frac{qBr}{m} \implies E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBr)^2}{2m}.$$

A részecske minden (fél)fordulat után ΔE energiát nyer, n (fél)fordulat után $E(n) = n\Delta E$ lesz az energiája.

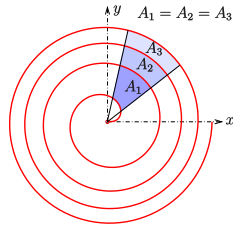
Ezt visszahelyettesítve az energia egyenletbe, és kifejezve a terület képletben szereplő pályasugár négyzetét

$$E(n) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(qBr(n))^2}{2m} \implies r^2(n) = \frac{2m\Delta E}{(qB)^2} n.$$

Két szomszédos (fél)körpálya közé zárt terület tehát jó közelítéssel állandó:

$$A \propto r^2(n+1) - r^2(n) = \frac{2m\Delta E}{(qB)^2} [(n+1) - n] = \frac{2m\Delta E}{(qB)^2} = \text{konst.} \quad \square$$

Megjegyzés: A ciklotronban a pálya *közelíthető* egy úgynevezett Fermat-spirállal, aminek egyenlete polár koordinátákban $r = \pm a\sqrt{\varphi}$. (A Fermat-spirálnál a sugár folytonosan nő, a ciklotronnál viszont félkörívenként „ugrásszerűen” nő meg.) A Fermat-spirálra egzaktul teljesül, hogy két tetszőleges húrral határolt körszeletek között a terület mindig állandó (ábra).



$$\langle P(S10) \rangle = PS10 \pm dS10$$