

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny – Elődöntő 2022.

Megoldások

Minden feladat helyes megoldása 5 pontot ér. A feladatokat tetszőleges sorrendben lehet megoldani. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak. A megoldáshoz bármilyen „offline” segédeszköz használható, telekommunikációs eszközök használata tilos. Rendelkezésre álló idő: 180 perc.

A javító tanár belátása szerint az 5 pont az itt megadottaktól eltérő formában is felhasználható. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldást is természetesen értékelni kell!

1. Feladat:

(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)

Mely híres XX. századi fizikusoktól származhatnak az alábbi idézetek?

- a) „Ez volt a leghihetlenebb dolog, ami valaha történt velem. Majdnem olyan, mintha az ember egy tizenöt hüvelykes ágyúval selyempapírra löne, és a golyó visszapattanna.”
- b) „Jöjjön Koppenhágába, dolgozzon velünk. Kedveljük azokat, akik gondolat kísérleteket tudnak végezni!”
- c) „Felkapcsoltuk a kapcsolót, és láttuk a villanásokat. Néztük tíz percig, aztán mindent kikapcsoltunk és hazamentünk. Azonnal tudtam, hogy nagy bánat vár a világra.”
- d) „Nem a gravitáció tehet róla, hogy az emberek szerelembe esnek.”
- e) „Nem szabad elfelejtenünk, hogy a rádiumról felfedezésekor senki sem tudta, hogy hasznos lesz a gyógyításban. Az tisztán alap kutatás volt. Ez is bizonyítja, hogy a tudományos munkát nem szabad pusztán a közvetlen haszna alapján megítélni. Végezni kell önmagáért, a tudomány szépségeért; és persze mindig fennáll az esélye, hogy egy tudományos felfedezés – mint a rádium – majd az emberiség hasznára válik.”

Megoldás:

- a) Ernest Rutherford (https://hu.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford) (1 pont)
- b) Niels Bohr (<https://tinyurl.com/mrvee3x8>) (1 pont)
- c) Szilárd Leó (<https://quotepark.com/hu/szerzok/szilard-leo/>) (1 pont)
- d) Albert Einstein (https://www.citatum.hu/szerzo/Albert_Einstein/3?r=4) (1 pont)
- e) Marie Curie (<https://hu.eferrit.com/marie-curie-idezetek/>) (1 pont)

2. Feladat:

(kitűzte: Halász Máté és Sükösd Csaba || 5 pont)

Egy átlagos magyar család éves villamosenergia-fogyasztása 2275 kWh (2020-as adat). Becsüljük meg, hogy hány gramm ^{235}U elhasítása lenne szükséges, ha ennek a villamos energiának a teljes egészét a Paksi Atomerőműben termelnék meg? Adatok: A Paksi Atomerőmű egy blokkjának névleges elektromos teljesítménye $P_e = 500$ MW, termikus teljesítménye $P_t = 1485$ MW. Az egy hasadásban felszabaduló energiát vegyük $E_h = 200$ MeV-nek.

Megoldás:

Az éves villamosenergia-fogyasztásnak megfelelő hőmennyiség:

$$Q = \frac{P_t}{P_e} E_e = \frac{1485 \text{ MW}}{500 \text{ MW}} \cdot 2275 \text{ kWh} \cdot 1000 \frac{\text{W}}{\text{kW}} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \approx 2,43 \cdot 10^{10} \text{ J.} \quad (1 \text{ pont})$$

$E_h = 200$ MeV hasadásonként felszabaduló energiával számítva ez összesen

$$N = \frac{Q}{E_h} = \frac{2,43 \cdot 10^{10} \text{ J}}{200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 7,6 \cdot 10^{20} \text{ db} \quad (2 \text{ pont})$$

hasadás. Az éves villamosenergia-fogyasztás megtermeléséhez szükséges elhasadt ^{235}U magok összömege tehát:

$$m = \frac{N}{N_A} M_{^{235}\text{U}} = \frac{7,6 \cdot 10^{20}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \cdot 235,0439 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 0,2967 \text{ g} \approx 0,3 \text{ g.} \quad (2 \text{ pont})$$

4,7%-os friss üzemanyag dúsítással számolva az egy családra jutó üzemanyag teljes tömege $\approx 6,4$ g.

3. Feladat:**(kitűzte: Ujvári Sándor || 5 pont)**

A ^{239}Pu α -bomló, és az α -részecskéket 5,1567 MeV kinetikus energiával bocsátja ki. Hőmérsékleti egyensúlyban az 1 mol mennyiségű ^{239}Pu izotóp 0,461 W hőteljesítménnyel fűti a környezetét.

- a) Mennyi az α -bomlásban felszabaduló teljes energia?
 b) Számítsuk ki ezekből az adatokból a ^{239}Pu felezési idejét!

Megoldás:

- a) Vegyük észre, hogy nem a bomlási energia, hanem az α -részecske kinetikus energiája van megadva! A leadott energia a leánymag (^{235}U) és az α -részecske kibocsátás utáni mozgási energiájának összege. Az energiamegmaradás és a lendületmegmaradás tételét felírva:

$$Q = \frac{m_{\text{U}}v_{\text{U}}^2}{2} + \frac{m_{\alpha}v_{\alpha}^2}{2}$$

$$m_{\text{U}} \cdot v_{\text{U}} = m_{\alpha} \cdot v_{\alpha}$$

v_{U} -t kifejezve és behelyettesítve az energia képletébe:

$$Q = \frac{m_{\text{U}}m_{\alpha}^2 \cdot v_{\alpha}^2}{2} + \frac{m_{\alpha} \cdot v_{\alpha}^2}{2} = \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{U}}} E_{\alpha} + E_{\alpha} = E_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{\text{U}}} + 1 \right),$$

$$Q = \left(\frac{4}{235} + 1 \right) \cdot 5,1567 \text{ MeV} \approx 5,2445 \text{ MeV} = 5,2445 \cdot 10^6 \text{ eV} \approx 8,4026 \cdot 10^{-13} \text{ J.} \quad (2 \text{ pont})$$

- b) A leadott teljesítmény az elbomlott magok száma szorozva a bomlásonként felszabaduló energiával, innen számíthatjuk a felezési időt:

$$P = \lambda N Q = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} N Q \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2) \cdot n \cdot N_A \cdot Q}{P}. \quad (2 \text{ pont})$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2) \cdot 1 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 8,4026 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{0,461 \text{ W}} = 7,6083 \cdot 10^{11} \text{ s.} \quad (1 \text{ pont})$$

Az 1 évet 365,24 nappal számítva kapjuk, hogy $7,6083 \cdot 10^{11} \text{ s} \approx 24\,110 \text{ év}$.

4. Feladat:**(kitűzte: Ujvári Sándor || 5 pont)**

Egy $8 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ energiájú foton ütközik egy hozzá képest nyugvónak és szabadnak tekinthető elektronnal. A visszaverődő foton a beesővel ellentétes irányban halad.

- a) Mekkora a beeső foton hullámhossza?
 b) A visszaverődő foton hullámhossza hány százalékkal nagyobb a beeső foton hullámhosszánál?
 c) Mekkora az ütközés után az elektron sebessége?

Megoldás:

Jelöljük a foton és elektron ütközés előtti frekvenciáját, hullámhosszát és sebességét f , λ és v -vel, míg ütközés után f' , λ' és v' , az elektron nyugalmi tömege m_0 , a foton ütközés előtti energiája E_{γ} , a feladat szövegének értelmében $v = 0$.

- a) A foton hullámhossza:

$$\lambda = h \frac{c}{E_{\gamma}} = 6,262 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8 \cdot 10^{-16} \text{ J}} \approx 2,485 \cdot 10^{-10} \text{ m.} \quad (1 \text{ pont})$$

- b) A hullámhossz megváltozása kiszámítható a Compton-egyenletből:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} [1 - \cos(\vartheta)] = \frac{6,262 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} [1 - (-1)] \approx 4,85 \cdot 10^{-12} \text{ m.} \quad (1 \text{ pont})$$

A növekedés százalékos értéke $100 \cdot \Delta\lambda / \lambda = 100 \cdot 4,85 \cdot 10^{-12} \text{ m} / 2,48 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 1,95\%$. (1 pont)
 (A 180° -os visszaverődés miatt a hullámhossz megváltozása éppen a $\lambda_{\text{C}} = h / (m_0 c) \approx 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ Compton-hullámhossz kétszerese.)

- c) Az elektron sebessége kiszámítható az átadott energiából. Első közelítésként feltesszük, hogy nem lesz relativisztikus:

$$\Delta E = E_\gamma - hf' = E_\gamma - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = E_\gamma - \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} = 8 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,0195}\right) \approx 1,53 \cdot 10^{-17} \text{ J.}$$

(1 pont)

Innen az elektron sebessége:

$$\Delta E = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_0}} \approx 5,8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(1 pont)

A sebesség valóban nem relativisztikus.

Alternatív megoldás: A 180° -os visszaverődés miatt számíthatunk energia- és lendületmegmaradásból is:

$$\begin{aligned} \frac{E_\gamma}{c} &= -\frac{h}{\lambda'} + p_e \\ E_\gamma &= \frac{hc}{\lambda'} + \frac{p_e^2}{2m_0}. \end{aligned}$$

Az első egyenletet c -vel szorozva és a második egyenlettel összeadva az ismeretlen λ' kiejthető, és p_e -re kapunk egy másodfokú egyenletet:

$$2E_\gamma = p_e c + \frac{p_e^2}{2m_0} \Rightarrow p_e^2 + 2m_0 c \cdot p_e - 4m_0 E_\gamma = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva, a pozitív gyököt megtartva kapjuk, hogy

$$v' = \frac{p_{e,1}}{m_0} = c \left(\sqrt{1 + \frac{4E_\gamma}{m_0 c^2}} - 1 \right) = \dots \approx 5,8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mivel $v' \ll c$, ezért jogos volt klasszikusan számítani. A visszaverődő foton energiája:

$$E'_\gamma = E_\gamma - \frac{1}{2} m_0 v'^2 = \dots = 7,847 \cdot 10^{-16} \text{ J},$$

innen a hullámhosszak arányára kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} = \frac{8}{7,847} = 1,0195,$$

azaz a növekedés 1,95%-os.

5. Feladat:

(kitűzte: Szűcs József || 5 pont)

Egy a Naptól állandó távolságban, folyamatos napsütésben keringő űrhajóból a helyi napállandó meghatározása céljából az űrhajósok egy jó hővezető kockát helyeznek ki az űrbe úgy, hogy egyik (abszolút fekete) lapja merőleges a napsugárzásra. A többi öt lap tükröződő fóliával van borítva, melynek fényvisszaverő képessége $r_t = 0,8$. (A fényelnyelő és fényvisszaverő képességeket vegyük hullámhossztól és hőmérséklettől függetlenül állandónak!)

- Mekkora a mért S_0 napállandó, ha a kocka állandósult hőmérséklete 57°C ?
- Mennyivel és hogyan változik meg a kocka állandósult hőmérséklete, ha az egyik oldaláról eltávolítják a borító fóliát (a fólia nélküli lap feketének vehető)?
- Legfeljebb hány borítófóliát távolíthatnak el a kísérlet során anélkül, hogy a kocka hőmérséklete 0°C alá esne?

Megoldás:

Bár a fényes oldalakat nem éri napsugárzás, a probléma megoldásához szükségünk van Kirchhoff sugárzási törvényére, miszerint (adott hullámhosszon és hőmérsékleten) az emisszióképesség és az abszorpcióképesség hányadosa állandó. A feladat felteszi, hogy ez most minden hullámhosszra és hőmérsékletre igaz. Az abszolút fekete oldal esetén, definíció szerint $a_f = \epsilon_f = 1$, míg a tükröződő oldalra $a_t = \epsilon_t = 1 - r_t = 0,2$. Jelöljük a kocka oldalhosszúságát l -el, a Stefan-Boltzmann állandó $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$, az egyszerűség kedvéért legyen $T[^\circ\text{C}] = 273 + T[\text{K}]$.

a) Egyensúly esetén az elnyelt és kibocsátott hőmérsékleti sugárzás megegyezik:

$$S_0 l^2 = \sigma T_0^4 (l^2 + 5 \cdot 0,2 l^2) \implies S_0 = 2 \sigma T_0^4 = 2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (330 \text{ K})^4 = 1344,83 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (2 \text{ pont})$$

b) 1 fólia eltávolítása utáni egyensúlyi állapot:

$$S_0 l^2 = \sigma T_1^4 (2l^2 + 4 \cdot 0,2 l^2) \implies T_1 = \sqrt[4]{\frac{S_0}{2,8 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2 \sigma T_0^4}{2,8 \sigma}} = T_0 \sqrt[4]{\frac{2}{2,8}} = 303,37 \text{ K} = 30,38^\circ\text{C}.$$

Tehát a kocka hőmérséklete $26,62^\circ\text{C}$ -kal csökken.

(1 pont)

c) Újabb fóliák eltávolítása után a kocka hőmérséklete

$$T_2 = T_0 \sqrt[4]{\frac{2}{3 \cdot 0,2 + 3}} = 0,8633 \cdot 330 \text{ K} = 284,9 \text{ K} = 11,9^\circ\text{C},$$
$$T_3 = T_0 \sqrt[4]{\frac{2}{2 \cdot 0,2 + 4}} = 0,8210 \cdot 330 \text{ K} = 270,96 \text{ K} = -2,03^\circ\text{C}.$$

Tehát összesen 2 db védőfóliát távolíthatunk el a kísérleti kockáról.

(2 pont)

6. Feladat:

(kitűzte: Ujvári Sándor || 5 pont)

A galaxisok színeképe felvilágosítást ad arról, hogy milyen anyagokból állnak. A galaxisok színkép vonalainak hullámhossza viszont a földi elemek színképéhez képest eltolódik. Ez a galaxisok hozzánk képest végzett mozgásáról hordoz információt. Az Androméda-galaxis színképét vizsgálva a mérések szerint a hidrogén 656,281 nm-es színkép vonala eltolódott 655,624 nm-re.

Milyen irányba és milyen sebességgel mozog hozzánk képest ez a galaxis?

Megoldás:

A Doppler-összefüggés értelmében a megfigyelt hullámhossz (λ_m) és a forrás hullámhossz (λ_f) között a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\frac{f_f}{f_m} = \frac{\lambda_m}{\lambda_f} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2 \text{ pont})$$

ahol $\beta = v/c$, v a forrás és megfigyelő egymáshoz viszonyított sebessége. Ebből

$$\beta = \frac{\lambda_m^2 - \lambda_f^2}{\lambda_m^2 + \lambda_f^2} = \frac{655,624^2 - 656,281^2}{655,624^2 + 656,281^2} \approx -0,001, \quad (2 \text{ pont})$$

azaz a galaxis $c/1000 \approx 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ sebességgel **közelít** a megfigyelő felé.

(1 pont)

Megjegyzés: bár az univerzum tágulásával a legtöbb galaxis fényét vöröseltolódással látjuk, a galaxisok egymáshoz képest is mozognak, így előfordulhat, hogy két galaxis közeledik egymáshoz.

Alternatív megoldás:

A fenti megoldásban szereplő képlet általános, relativisztikus sebességeknél is érvényes. A hangtani Doppler-effektusnál figyelembe vesszük hogy a hang terjedési közegéhez képest milyen irányban és

sebességgel mozog a forrás és a megfigyelő is. A feladatból látjuk, hogy az eltolódott hullámhossz rövidült (kékeltolódás), tehát a forrás galaxis a megfigyelőhöz közeledik. Ekkor klasszikusan írhatjuk:

$$f_m = f_f \frac{c \pm v_m}{c - v_f},$$

Ahol $\pm$ előjele attól függ hogy a megfigyelő közeledik vagy távolodik-e a forráshoz képest a hullámterjedési közeg inerciarendszerében. A fénysebesség viszont minden inerciarendszerben ugyanaz, ezért vizsgálhatjuk a folyamatot a megfigyelőhöz rögzített inerciarendszerből, ahol $v_m = 0$. A képletet átírva hullámhosszra ($f\lambda = c$) kapjuk, hogy

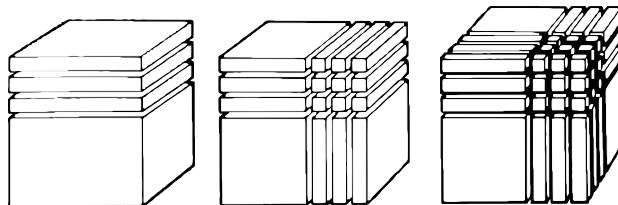
$$\lambda_m = \lambda_f \frac{c - v_f}{c} \implies v_f = c \frac{\lambda_f - \lambda_m}{\lambda_f} \approx \frac{c}{1000}.$$

A sebesség előjele pozitív, mivel azt tételeztük fel, hogy a forrás közeledik.

7. Feladat:

(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)

Becsüljük meg a megadott adatok segítségével, hogy mekkora lehet egy szén-tetraklorid molekula mérete (a szomszédos molekulák átlagos távolsága)! A megoldáshoz használjuk fel a következőket: a forrás során teljesen eltávolodnak egymástól a molekulák, a molekulák eltávolítása elérhető a felület növelésével is. Gondolatban egy V térfogatú kockát lehet sok kis, egy molekulát tartalmazó kockára felbontani az ábrán látható módon. Adatok: a szobahőmérséklet $T_{sz} = 22^\circ\text{C}$, a szén-tetraklorid forráspontja $T_f = 76^\circ\text{C}$, fajhője $c = 0,84 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$, forráshője $L_f = 195 \text{ kJ/kg}$, felületi feszültsége $\sigma = 2,64 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$, sűrűsége $\rho = 1590 \text{ kg/m}^3$ (tekintsük állandónak).



Megoldás:

A megoldáshoz tekintsük egy l oldalélű kocka feldarabolását d oldalélű kockákra, ahol d a molekula mérete. A vágások teljes száma $3(l/d - 1)$. Minden vágásnál $2l^2$ új felület keletkezik. Ha makroszkopikus kockát tekintünk, úgy feltehetjük hogy $l/d \gg 1$, és így a vágások száma $\approx 3l/d$. (1 pont)

Ha a felületi feszültség σ , akkor az ehhez szükséges energia

$$E_v = 3 \cdot \frac{l}{d} \cdot 2l^2 \cdot \sigma. \quad (1 \text{ pont})$$

A kocka felmelegítéséhez ($\Delta T = T_f - T_{sz}$) és elforralásához szükséges energia:

$$E_f = l^3 \rho \cdot (c\Delta T + L_f). \quad (1 \text{ pont})$$

Mind a feldaraboláshoz, mind az elforraláshoz ugyanannyi energiát kell felhasználni, tehát:

$$E_v = E_f \implies \frac{3l}{d} \cdot 2l^2 \cdot \sigma = l^3 \rho \cdot (c\Delta T + L_f). \quad (1 \text{ pont})$$

Ebből d értéke kiszámítható:

$$d = \frac{6\sigma}{(c\Delta T + L_f)\rho} = \frac{6 \cdot 2,64 \cdot 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{m}^2}}{\left[840 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 54^\circ\text{C} + 195 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \cdot 1590 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 4,14 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (1 \text{ pont})$$

Megjegyzés: Ehhez a becsléshez csak makroszkopikusan mérhető mennyiségeket (sűrűség, fajhő, forráshő, felületi feszültség) használtunk fel, nincs szükség az Avogadro-számmra vagy moláris tömegre.

8. Feladat:**(kitűzte: Mester András és Tarján Péter || 5 pont)**

A szén radioaktív ^{14}C izotópja ($T_{1/2} = 5700$ év) a Föld légkörében folyamatosan keletkezik és hozzájárul a légkör sugárzásához. A légköri radiokarbon aktivitásának legmagasabb értékét 1963-ban mérték, ekkor a légkör molekuláinak 0,032%-a volt CO_2 , és a szénatomok $2,33 \cdot 10^{-12}$ -ed része volt ^{14}C . Adatok: $p = 1,01325 \cdot 10^5$ Pa, $g = 9,81$ m/s², $R_{\text{Föld}} = 6370$ km, $M_{\text{levegő}} = 29$ g/mol.

- Mekkora volt 1963-ban a ^{14}C aktivitása a légkörben?
- Hány százalékos az aktivitás változása a földi légkör sugárzásának a múlt század első felében állandósult $1,57 \cdot 10^8$ GBq értékéhez képest?
- Mi lehet a növekedés és a későbbi csökkenés oka?

Megoldás:

- a) A légnyomás a teljes légkör súlyából származó nyomás, így $pA = mg$, ahol m a teljes légkör tömege, $A = 4\pi R_{\text{Föld}}^2$ pedig a Föld felszíne. Így a légkör tömege és anyagmennyisége:

$$m = \frac{p \cdot 4\pi R_{\text{Föld}}^2}{g} = 5,267 \cdot 10^{18} \text{ kg} \implies n = \frac{m}{M} = 1,816 \cdot 10^{20} \text{ mol.} \quad (1 \text{ pont})$$

Ebből a CO_2 molekulák száma:

$$N_{\text{CO}_2} = f_{\text{C}_{14}} \cdot n \cdot N_A = 3,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,816 \cdot 10^{20} \cdot 6,0221 \cdot 10^{23} \approx 3,5 \cdot 10^{40}.$$

Legyen $N_{\text{C}_{12}}$ ill. $N_{\text{C}_{14}}$ a szén 12-es illetve 14-es izotópjainak darabszáma, $N_{\text{C}} = N_{\text{C}_{12}} + N_{\text{C}_{14}}$ az összes szénatom darabszáma. Mivel a 14-es izotóp mennyisége nagyon kicsi, ezért közelíthetünk úgy, hogy $N_{\text{C}} \approx N_{\text{C}_{12}}$. A radioaktív ^{14}C -et tartalmazó CO_2 -molekulák száma így:

$$N_{\text{C}_{14}} = 2,33 \cdot 10^{-12} \cdot N_{\text{C}} \approx 2,33 \cdot 10^{-12} \cdot N_{\text{C}_{12}} \approx 8,15 \cdot 10^{28}. \quad (1 \text{ pont})$$

A radiokarbon aktivitása:

$$A = \lambda N_{\text{C}_{14}} = \frac{\ln(2)}{T} \cdot N_{\text{C}_{14}} = \frac{0,693}{5700 \text{ év} \cdot 365,24 \text{ nap/év} \cdot 86400 \text{ s/nap}} \cdot 8,15 \cdot 10^{28} \approx 3,14 \cdot 10^{17} \text{ Bq} = 3,14 \cdot 10^8 \text{ GBq}.$$

Tehát a légkörben 1963-ban másodpercenként kb. $3,14 \cdot 10^{17}$ ^{14}C mag bomlott el. (1 pont)

- b) A növekedés a múlt század első feléhez képest:

$$\Delta A = \frac{A - A_0}{A_0} = \frac{3,14 \cdot 10^8 \text{ GBq} - 1,57 \cdot 10^8 \text{ GBq}}{1,57 \cdot 10^8 \text{ GBq}} = 1 = 100\%. \quad (1 \text{ pont})$$

- c) A Földön a kozmikus sugárzás hatására keletkező neutronok hatnak kölcsön a légköri nitrogénnel: $n + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + p$. A bomlás és keletkezés között beáll egy egyensúly, ezért a légköri ^{14}C koncentráció természetes körülmények között állandósul. A fosszilis tüzelőanyagokban az évmilliók során már lebomlott a bennük lévő ^{14}C , így elégetésük *higítja* a légkör ^{14}C tartalmát.

A növekedés oka, hogy emberi tevékenységek, főleg a légköri atombomba-kísérletek hatására szabad neutronok kerültek a légkörbe, így a ^{14}C -izotóp mesterséges előállítása is megvalósult. 1963-tól az atomhatalmak nagy része nemzetközi egyezményekben vállalta a légköri atombomba-robbantások beszüntetését (Partial Test Ban Treaty, 1963. október). A megnövekedett ^{14}C tartalom folyamatosan csökken a szén körforgása (illetve a ^{14}C bomlása és hígulása) miatt, és kellő idő eltelte múlva visszaáll a korábbi egyensúlyi értékre. (1 pont)

9. Feladat:**(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)**

Rutherford-féle szórás kísérletet végzünk ${}^{27}_{13}\text{Al}$ magokon: vékony alumínium fóliát bombázunk 5,49 MeV energiájú α -részecskékkal. Tegyük fel, hogy az Al atommag szabadon el tud mozdulni.

- Milyen közel juthat az α -részecske az Al atommagjához?
- Előfordulhat-e, hogy az α -részecske valamilyen magreakciót hoz létre, és nem csak Rutherford-szórás történik? Az atommag sugarát közelítsük az $R \approx 1,25 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A}$ [m] formulával.

Az α -részecske és az Al mag tömegarányát egyenlőnek vehetjük a tömegszámok arányával.

Megoldás:

- a) Az α -részecske akkor kerül legközelebb az atommaghoz, ha a sebességvektora éppen a középpontjukat összekötő egyenesbe esik. A Coulomb-erő lassítja az α -részecskét és gyorsítja az Al atommagot. Amíg az α -részecske sebessége nagyobb, mint a magé, a köztük levő távolság csökken. Amint az α -részecske sebessége kisebb lesz, mint a magé, a köztük levő távolság növekszik. Ezért az alfa-részecske akkor van legközelebb a maghoz, amikor sebességeik éppen megegyeznek: $u_\alpha = u_{\text{Al}} = u$. Ezzel az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}m_\alpha u^2 + \frac{1}{2}m_{\text{Al}} u^2 + k \frac{2 \cdot 13e^2}{r_{\min}}. \quad (1 \text{ pont})$$

Kihasználva a lendületmegmaradást, kapjuk, hogy

$$u = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Al}}} v_\alpha. \quad (1 \text{ pont})$$

Az egyenlet rendezése után

$$r_{\min} = k \frac{13e \cdot 2e}{E_\alpha} \cdot \frac{m_{\text{Al}} + m_\alpha}{m_{\text{Al}}} \approx k \frac{13e \cdot 2e}{E_\alpha} \cdot \frac{27 + 4}{27} \approx 7,841 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (2 \text{ pont})$$

- b) Az Al magjának sugara $R_{\text{Al}} \approx r_0 \cdot \sqrt[3]{A} \approx 3,75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, az α -é pedig $R_\alpha \lesssim 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Klasszikus gondolatmenettel az α -részecske nem érheti el a magot, hiszen $r_{\min} > (R_{\text{Al}} + R_\alpha)$. Viszont nincs nagyságrendi különbség az értékek között, így a kvantummechanikai **alagúteffektus** miatt létrejöhet magreakció. (1 pont)

(Az α -részecske átlagos mért sugara $R_\alpha \approx 1,67 \cdot 10^{-15} \text{ m} \rightarrow$ a $\sqrt[3]{A}$ képlet nagy A esetén pontosabb.)

10. Feladat:

(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)

Hogyan aránylik egymáshoz a 2 MV feszültséggel gyorsított elektron, illetve proton de Broglie-hullámhossza?

Megoldás:

A de Broglie-hullámhossz kiszámítható a részecske lendületéből: $\lambda = h/mv$. Klasszikusan kezelhető részecskénél kihasználhatjuk, hogy $mv = \sqrt{2mE_m} = \sqrt{2mQU}$. (1 pont)

Mindkét részecske egyszeres töltésű, így a mozgási energiájuk azonos, 2 MeV. Ez a proton nyugalmi energiájánál sokkal kisebb, így a proton esetében jogos közelítés a klasszikus mozgási energiával számolni:

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p eU}} = 2,024 \cdot 10^{-14} \text{ m}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az elektron esetében a 2 MeV energia a relativisztikus tartományba esik, hiszen a nyugalmi energia ennek kb. negyede. **Aki az elektront nem relativisztikusan számolja, legfeljebb 3 pontot kaphat a feladatra!**

Relativisztikusan tehát $E_m = (\gamma - 1)m_0 c^2$, ahol $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Innen

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}/c^2} + 1 = 4,914, \\ v &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c = 0,979c = 2,935 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ m &= \gamma m_0 = 4,914 m_0 = 4,476 \cdot 10^{-30} \text{ kg}, \\ p &= mv = 1,314 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ \lambda_e &= \frac{h}{p} = 5,043 \cdot 10^{-13} \text{ m}. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Ezzel a keresett arány

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = 24,92. \quad (1 \text{ pont})$$

Alternatív megoldás: A lendületet közvetlenül is kiszámíthatjuk a relativisztikus energia formulából (ez esetben mindkét részecskét relativisztikusan kezelve):

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{tot}}^2 - (m_0 c^2)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(E_m + m_0 c^2)^2 - (m_0 c^2)^2}.$$

Az $E_m = 2 \text{ MeV}$ mozgási és $m_{0,e} c^2 = 0,511 \text{ MeV}$, $m_{0,p} c^2 = 938,27 \text{ MeV}$ nyugalmi energiákat a képletbe behelyettesítve az elektronra és protonra kapjuk, hogy

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{(2 + 938,27)^2 - 938,27^2}{(2 + 0,511)^2 - 0,511^2}} \approx 24,93.$$