

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny – Elődöntő 2021.

Megoldások

Minden feladat helyes megoldása 5 pontot ér. A feladatokat tetszőleges sorrendben lehet megoldani. A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak. A megoldáshoz bármilyen „offline” segédeszköz használható, telekommunikációs eszközök használata tilos. Rendelkezésre álló idő: 180 perc.

A javító tanár belátása szerint az 5 pont az itt megadottaktól eltérő formában is felhasználható. A javítás során a közölttől eltérő gondolatmenetű, de szakmailag helyes megoldást is természetesen értékelni kell!

1. Feladat:

(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)

Mekkora a sebessége annak az

a) elektronnak

b) protonnak

amelyiknek a mozgási energiája éppen megegyezik a nyugalmi energiájával?

Megoldás:

a) A feladat szövege szerint a teljes energia

$$E_t = \gamma m_0 c^2 = 2m_0 c^2 \implies \gamma = 2. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen kifejezhető a részecskék v/c sebessége:

$$\gamma = 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies v \approx 0,866c \approx 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (2 \text{ pont})$$

b) A részecske nyugalmi tömege kiesik a számítás során, így mindegy hogy elektronról vagy protonról (vagy egyébről) van szó. Tehát protonra szintén $v \approx 0,866c \approx 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. (1 pont)

2. Feladat:

(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)

A káliumhiányos, illetve a sóelvonókúrán lévő betegeknek Kálium-R tablettát kell szedniük, mely 524,44 mg káliumot tartalmaz tablettánként. Mekkora többletaktivitást jelent napi 2 tablettát bevétele egy egészséges embernek, akinek a ^{40}K aktivitása kb. 5 kBq? A kálium atomok 0,0117%-a ^{40}K , és ennek felezési ideje $1,27 \cdot 10^9$ év.

Megoldás:

Az aktivitás képlete

$$A = \lambda N = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} N. \quad (1 \text{ pont})$$

A felezési idő meg van adva, így csak a magok számát kell meghatároznunk:

$$N = 2 \cdot 0,0117\% \cdot \frac{m}{M} N_A = 2 \cdot 1,17 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0,52444 \text{ g}}{40 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \approx 1,84 \cdot 10^{18} \text{ db}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből számítható az aktivitás:

$$A = \frac{0,693}{1,27 \cdot 10^9 \cdot 3,1536 \cdot 10^7 \text{ s}} \cdot 1,85 \cdot 10^{18} \approx 31,85 \text{ Bq}. \quad (2 \text{ pont})$$

Így a tabletták $31,85 \text{ Bq}/5 \text{ kBq} \approx 0,64\%$ -os növekedést jelentenek.

3. Feladat:

(kitűzte: Halász Máté || 5 pont)

Tegyük fel, hogy egy ^{235}U atommag egy neutron befogása után két azonos részre hasad.

a) Becsüljük meg, hogy mekkora elektrosztatikus energia szabadul fel a hasadás során (számoljunk egyenletes töltéssűrűséggel)!

b) Hogyan viszonyul ez a hasadás során felszabaduló teljes energiához?

c) Mi az eltérés oka?

Az R sugarú, $+Ze$ töltésű egyenletesen töltött gömb elektrosztatikus energiája:

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$$

Megoldás:

- a) A neutron befogásával létrejövő ^{236}U atommag tömegszáma $A = 236$, sugara a következőképpen számítható:

$$R \approx 1,2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ m} \approx 7,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ha a ^{236}U mag két egyenlő részre hasad, akkor az elektrosztatikus energiában bekövetkező változás ($1/(4\pi\epsilon_0) \equiv k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$):

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= \frac{3}{5}k \left[\frac{(Ze)^2}{R} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{Z}{2}e\right)^2}{R \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}} \right] = \frac{3}{5}k \frac{(Ze)^2}{R} \left(1 - 2 \cdot \frac{2^{1/3}}{4} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(92 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{7,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}} \cdot \left(1 - \frac{2^{1/3}}{2} \right) \approx 5,85 \cdot 10^{-11} \text{ J} \approx 365,6 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

- b) Egy hasadás során körülbelül 200 MeV energia szabadul fel, ami jelentősen kevesebb, mint a felszabaduló elektrosztatikus energia. (1 pont)
- c) Az eltérés oka elsősorban a felületi energiatag hasadás következtében történő növekedése, illetve másodsorban az, hogy a hasadás általában nem szimmetrikusan történik. (1 pont)

4. Feladat:

(kitűzte: Radnóti Katalin || 5 pont)

Mekkora energiával lehet egy vízmolekulát elemeire bontani? Becsüljük meg az alábbi mérés alapján! Vízet elektrolizálunk, az elektrolízis során keletkezett hidrogéngáz térfogata 10 cm^3 , nyomása 10^5 Pa és hőmérséklete 293 K . Az elektrolízist $1,74 \text{ V}$ feszültségen végezzük $\eta = 90\%$ -os hatásfokkal.

Megoldás:

A vízbontáshoz töltésvételre van szükség. A hidrogén leválasztáshoz szükséges töltés $Q = 2eN$, ahol e az elemi töltés, N pedig az időegység alatt elektrolizált vízmolekulák száma. (2 pont)

Az ehhez szükséges energia U feszültségen $E = \eta UQ$. (1 pont)

A kérdéses molekulánkénti energia tehát:

$$\frac{E}{N} = \frac{\eta UQ}{N} = \frac{\eta U \cdot 2eN}{N} = 2\eta Ue = 2 \cdot 0,9 \cdot 1,74 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 0,5 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 0,5 \text{ aJ}. \quad (2 \text{ pont})$$

Alternatív megoldás:

A felbontott molekulák száma a gáztörvényből számítható:

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 293 \text{ K}} = 2,47 \cdot 10^{20} \text{ darab}. \quad (1 \text{ pont})$$

A gáztörvényből kiszámolt hidrogén leválasztáshoz szükséges Q töltés:

$$Q = N \cdot 2e = 2,47 \cdot 10^{20} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 79 \text{ C}. \quad (2 \text{ pont})$$

A leválasztáshoz szükséges energia

$$E = \eta UQ = 0,9 \cdot 1,74 \text{ V} \cdot 79 \text{ C} \approx 123,7 \text{ J}. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen $E/N = 123,7 \text{ J} / 2,47 \cdot 10^{20} \approx 0,5 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 0,5 \text{ aJ}$. (1 pont)

5. Feladat:

(kitűzte: Papp Gergely || 5 pont)

Mekkora legyen a bejövő proton mozgási energiája a $p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + n$ reakció során (a reakció endoterm, reakcióenergia: $Q = -1,6433 \text{ MeV}$), hogy a keletkező neutron a laborrendszerből nézve nyugalomban legyen? A ${}^7_3\text{Li}$ magot tekintsük állónak. Adatok: $m_{\text{Be}} = 7,01693 \text{ u}$, $m_p = 1,00728 \text{ u}$.

Megoldás:

A bejövő proton lendületét teljes egészében a Be magnak kell elvinnie, hiszen a neutron állva keletkezik; ugyanezért a neutron mozgási energiát sem visz el. (1 pont)

A folyamatra felírhatjuk a laborrendszerben a lendület- és energiamegmaradást:

$$p_p = p_{Be} \equiv p \quad \text{és} \quad E_{Be} - E_p = Q. \quad (1 \text{ pont})$$

A mozgási energiákat a proton p lendületével kifejezve:

$$Q = E_{Be} - E_p = \frac{p^2}{2m_{Be}} - \frac{p^2}{2m_p} = \frac{p^2}{2m_p} \left(\frac{m_p}{m_{Be}} - 1 \right). \quad (1 \text{ pont})$$

Innen kifejezhetjük a kérdéses proton energiát:

$$E_p = \frac{p^2}{2m_p} = \frac{Q}{\frac{m_p}{m_{Be}} - 1} = \frac{-1,6433 \text{ MeV}}{\frac{1,00728 \text{ u}}{7,01693 \text{ u}} - 1} \approx \frac{-1,6433 \text{ MeV}}{0,1436 - 1} = \frac{-1,6433 \text{ MeV}}{-0,8564} \approx 1,92 \text{ MeV}. \quad (2 \text{ pont})$$

6. Feladat:

(kitűzte: Mester András || 5 pont)

Egy kísérlet során egy 4 kg tömegű nyúl testébe 5 pikomol mennyiségű radioaktív izotópot juttattak. A sugárzás összaktivitása a 10. napon 3 kBq, a 60. napon pedig 1,5 kBq volt a kísérleti állat testében. Mekkora az elnyelt dózis (J/kg) a nyúl testében a kísérlet első 15 napja alatt, ha a testszövet bomlásonként 1 MeV energiát nyelt el?

Megoldás:

A bevitt radioaktív magok darabszáma

$$N_0 = n \cdot N_A = 5 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} = 3 \cdot 10^{12} \text{ darab}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az aktivitás 50 nap alatt a felére csökkent, így $T_{1/2} = 50$ nap. (1 pont)

A 15. napon meglévő radioaktív magok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} \implies N(15) = 3 \cdot 10^{12} \cdot 2^{-15/50} \approx 2,44 \cdot 10^{12}. \quad (1 \text{ pont})$$

Elbomlott: $N_0 - N(15) = 5,6 \cdot 10^{11}$ atom, ez $5,6 \cdot 10^{11} \text{ MeV} \approx 5,6 \cdot 10^{11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 0,09 \text{ J}$.

(1 pont)

Ebből az elnyelt dózisa kapjuk, hogy

$$D = \frac{0,09 \text{ J}}{4 \text{ kg}} = 2,25 \cdot 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \equiv 22,5 \text{ mGy}. \quad (1 \text{ pont})$$

7. Feladat:

(kitűzte: Papp Gergely || 5 pont)

A ^{14}C szénizotópos (radiokarbon) mérés egy elterjedt technika szerves anyagok kormeghatározásában, amennyiben a minta nem túl öreg (max 30-50 ezer éves).

- Hogyan keletkezik a Földön a radioaktív ^{14}C izotóp?
- Mi a radiokarbon kormeghatározási módszer alapelve?
- Tengeri élőlények radiokarbon meghatározása esetenként hibás - például frissen kifogott kagylók vagy tengeri emlősök esetén is több ezer éves (vagy még öregebb) - eredményt adhat. Mi lehet ennek az oka?

Megoldás:

- a) A Földön a kozmikus sugárzás hatására keletkező neutronok hatnak kölcsön a légköri nitrogénnel:



A bomlás és keletkezés között beállt egy egyensúly, ezért a légköri ^{14}C koncentráció állandósult.

- b) A módszer alapelve, hogy az élőlények életciklusuk során folyamatosan felvesznek és ürítenek szén (légkörből, táplálékláncból), ezáltal amíg életben vannak, a szövetekben lévő ^{14}C magok aránya a stabil ^{12}C -höz képest egyensúlyba kerül a légkörrel vagy a tápláléklánccal. (1 pont)
Mivel a ^{14}C radioaktív (5730 éves felezési idővel), ezért az élőlény pusztulása után a szénanyagcsere megszűnik és a ^{14}C elbomlik - minél öregebb a minta, annál kevesebb ^{14}C található benne. Amennyiben élete során a légköri értékkel került egyensúlyba (mely ismert és közel állandó viszonyítási szám), úgy az arány változásból kiszámítható a minta elhullásának kora. (1 pont)
- c) Az óceánokban nem a légköri szénizotóp arány található. Egyrészt a vízben is található szén (oldott CO_2 , karbonát ionok, stb), másrészt a vízbe oldódik a kőzetekből több millió éves szén is. Ezért a tengeri táplálékláncban sem a légköri $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ arány található. A pontos arány bonyolult módon függ az élőhelytől, táplálkozási szokásoktól, stb. Így tengeri élőlényekből származó szerves anyagokra a radiokarbon kormeghatározás tipikusan nem (vagy legfeljebb nagyon bonyolult kiegészítő számításokkal) alkalmazható. (2 pont)

8. Feladat:

(kitűzte: Tarján Péter || 5 pont)

A gerjesztett állapotú ^6Li mag gamma-bomló, a bomlás során felszabaduló energia 3562,88 keV. A stabil ^6Li atommag tömege $m = 6,013477$ u.

- a) Mekkora sebességgel lökődik vissza a kezdetben álló mag a gamma-bomlás során?
b) Hogyan aránylik ez a hőmozgás átlagos mozgási energiájából származó sebességhez 1500 °C hőmérsékleten (ahol a Li már gáz halmazállapotú)?

Megoldás:

- a) A bomlás során ^6Li mag keletkezik. A bomlási energia a lendületmegmaradás miatt megoszlik a foton és a leánymag között, amelyek egymással ellentétes irányban távoznak. A foton energiáját ε -nal, a bomlási energiát Q -val jelölve, az energia- és lendületmegmaradás egyenletei:

$$Q = \varepsilon + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{\varepsilon}{c} = mv. \quad (1 \text{ pont})$$

A második egyenletből: $\varepsilon = mvc$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve:

$$0 = v^2 + 2cv - \frac{2Q}{m}. \quad (1 \text{ pont})$$

A másodfokú egyenlet együtthatói $A = 1$, $B \approx 6 \cdot 10^8$ m/s, $C \approx -1,14 \cdot 10^{14}$ m²/s². Az egyenlet gyökei:

$$v_1 \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad (1 \text{ pont})$$

$$v_2 \approx -6,0 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

amiből a negatív gyök fizikailag nem értelmes.

- b) Ugyan az atommag a bomlási energiának csak kicsi részét (mindössze 0,032%-át) viszi el, a visszalökődés sebessége így is jelentős. A Li atom átlagos mozgási energiája 1500 °C ≈ 1773 K hőmérsékleten:

$$E_m = \frac{3}{2}kT \approx 3,67 \cdot 10^{-20} \text{ J}. \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan a sebesség $v_{th} \approx 2,71 \cdot 10^3$ m/s, azaz a visszalökődési sebesség a hőmozgásból származó sebességnek kb. 70-szerese. (1 pont)

9. Feladat:**(kitűzte: Sükösd Csaba || 5 pont)**

Egy sólámpa belsejében 15 W elektromos teljesítményű, 2000 K hőmérsékleten világító izzólámpa van. A sólámpa kristálya a lámpából ráeső teljesítmény 60%-át elnyeli. A sólámpa teljesen körülvesszi az izzószálat, külső felszíne 1000 cm^2 . A sólámpa teljes felszínét, valamint az állandó 20°C hőmérsékletű környezetet tekintsük feketetest sugárzónak. A konvektív és konduktív hőátadást hanyagoljuk el.

- Mekkora teljesítménnyel fűti az izzó a sólámpát?
- Mekkora teljesítménnyel fűti a környezet a sólámpát?
- Mitől függ, hogy a sólámpa mekkora teljesítménnyel fűti a környezetet?
- Milyen hőmérsékletű lesz a sólámpa felszíne, amikor már beállt a hőmérsékleti egyensúly?

Megoldás:

- a) A feladat szerint az izzó 15 W teljesítményének 60%-át elnyeli, azaz a sólámpát

$$P_1 = 15 \text{ W} \cdot 0,6 = 9 \text{ W} \quad (1 \text{ pont})$$

teljesítmény fűti az izzóból.

- b) A sólámpára a környezetből eső teljesítmény a hőmérsékleti sugárzásból

$$P_K = F \cdot \sigma \cdot T_K^4 = 1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 293,15^4 \text{ K} \approx 41,87 \text{ W}. \quad (1 \text{ pont})$$

- c) A kisugárzott teljesítmény a sólámpa felszínének hőmérsékletétől függ a Stefan-Boltzmann törvény alapján:

$$P_S = F \cdot \sigma \cdot T_S^4. \quad (1 \text{ pont})$$

- d) A sólámpa két forrásból kap sugárzási teljesítményt. Egyrészt belülről „fűti” a lámpa izzószála, másrészt a külső környezetből származó hőszugárzás. Az egyensúly beállta után a sólámpa külső felszíne hőszugárzás formájában az öt ért összteljesítményt fogja kisugározni.

A sólámpát érő összes teljesítmény $P_S = P_1 + P_K = 9 \text{ W} + 41,87 \text{ W} = 50,87 \text{ W}$. (1 pont)

A kisugárzásra vonatkozó Stefan-Boltzmann törvény:

$$P_S = F \cdot \sigma \cdot T_S^4 \implies T_S = \sqrt[4]{\frac{P_S}{F \cdot \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{50,87 \text{ W}}{1000 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}}} \approx 307,77 \text{ K}.$$

A sólámpa külső felszínének a hőmérséklete tehát $307,77 \text{ K} \approx 34,6^\circ\text{C}$ lesz. (1 pont)

10. Feladat:**(kitűzte: Szűcs József || 5 pont)**

Erőmentes L hosszúságú szakaszra 6 elektront zárunk be (a rendszerre érvényes a Pauli-elv). A bezárt elektronok összes mozgási energiája 10 eV. A kvantált elektronrendszer alapállapotban van.

- Mekkora az L szakasz hossza?
- Milyen maximális hullámhosszúságú fénnel gerjeszthető az elektronrendszer?
- Ha egy L -nek megfelelő hosszúságú láncmolekulákból álló polimerből (ahol a molekulákban 6-6 szabad elektron található) vékony fóliát készítenénk, akkor napfénnel átvilágítva milyen színűnek látnánk a fóliát?

Megoldás:

- a) Használjuk a szakaszra bezárt elektronra vonatkozó energia-képletet:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2. \quad (1 \text{ pont})$$

A Pauli-elvnek megfelelően 2-2 elektron van az 1., 2. és 3. energiaszinten. Így az elektronok mozgási energiájának összegét az alapállapot energiájával kifejezhetjük, ebből E_1 és a szakasz L hossza meghatározható:

$$\sum E = 2E_1 + 2 \cdot 4E_1 + 2 \cdot 9E_1 = 10 \text{ eV} \implies E_1 = 10/28 \text{ eV} = \frac{5}{14} \text{ eV}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \rightarrow L = \sqrt{\frac{h^2}{8mE_1}} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{1}{2mE_1}} =$$

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5/14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \approx 1,026 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 1,03 \text{ nm}.$$

(1 pont)

- b) Gerjesztéskor a 3. szinten lévő 2 elektron közül az egyik a 4., 5., 6., ... szintre kerülhet.

A maximális hullámhossz ekvivalens a minimális gerjesztési energiával, ennek feltétele:

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} \geq (16 - 9)E_1 = \frac{35}{14} \text{ eV} \Rightarrow \lambda_{\max} \leq \frac{hc}{\frac{35}{14} \text{ eV}} \approx 496 \text{ nm} \quad (\text{kékeszöld szín}). \quad (1 \text{ pont})$$

- c) Mivel a napsugárzás látható spektrumából (gerjesztés miatt) hiányoznak a 496 nm-es fényhullámok (kékeszöld szín, #00E8BE), ezért a maradék keveréke a kiegészítő vörös (#E82E00) színűnek látszik. (1 pont)

(Megjegyzés: hasonló színek – narancs, narancs-vörös, stb – is elfogadhatók jó megoldásként.)