

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny 2021 Döntő Elméleti feladatok megoldásai

PAPP Gergely

Max Planck Plazmafizika Intézet (München)

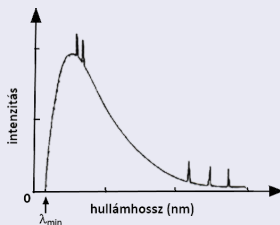
papp.gergely@gmail.com

2021-04-30



Egy röntgensőben az elektronok $1,8 \cdot 10^8$ m/s sebességre gyorsulnak fel.

- Hány %-os lesz az elektronok tömegének növekedése?
- Mekkora feszültség gyorsítja az elektronokat?
- A röntgensugárzás intenzitásához tartozó ábrán a folytonos tartományt az anódra becsapódó elektronok úgynevezett „fékezési sugárzása” adja. Mekkora lesz a kibocsátott röntgensugarak $\lambda_{\min}$ legrövidebb hullámhossza?
- Vajon mi okozza az ábrán látható „tüskéket” (a folytonos spektrumra ráakódó vonalas spektrumot)?



- A sebesség jelentős növekedésével megnőtt a látszólagos tömeg:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} = 1,25 \cdot m_0,$$

azaz a tömeg látszólagos megnövekedése **25%-os**.

- Az elektromos tér munkája megegyezik az elektronok mozgási energiájának változásával:

$$eU = mc^2 - m_0c^2 = 0,25m_0c^2 \implies U = \frac{0,25m_0c^2}{e} \approx \mathbf{128 \text{ kV}}.$$

- c) A legnagyobb fotonenergiát (legkisebb hullámhosszat) akkor kapjuk, amikor egy elektron teljes energiája egyetlen foton energiájává alakul. Az ehhez tartozó minimális hullámhossz:

$$eU = hf_{\max}.$$

$$f_{\max} = \frac{eU}{h} = 3,093 \cdot 10^{19} \text{ Hz} \implies \lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} \approx 9,964 \cdot 10^{-12} \text{ m} \approx \text{0,01 nm}.$$

- d) A röntgensugárzás egyik összetevője a fékezési sugárzás, amely egy fotonenergia tartományban folytonos, elektromágneses sugárzás. Az elektronokat gyorsító feszültségtől függ, hogy ez milyen hullámhossztartományt ölel át.

A kis tüskék jelzik a röntgensugárzás másik összetevőjét, az u.n. karakterisztikus röntgensugárzást. Az anódba becsapódó elektronok az anód atomjainak valamelyik belső elektronhéjáról képesek kiűtni egy-egy elektront.

A kiűtött elektron helyére magasabb héjakon lévő elektronok ugranak, a két elektronállapot energiája közötti különbséget jól meghatározott fotonenergiájú elektromágneses sugárzás formájában kibocsátva.

Az anód anyagára jellemző karakterisztikus sugárzás okozza a tüskéket. □

$\langle P(1) \rangle = 3,7 \pm 1,1$

Mivel nem tudjuk pontosan, hogy egy koronavírus-vakcinával beoltott ember mennyi ideig marad védett a vírus ellen, válasszuk azt a modellt, hogy ez is a radioaktív atommagokhoz hasonlóan történik: azaz nagyon sok ember esetén N beoltott emberből T „felezési idő” után már csak $N/2$ marad védett. A járványügyi szakemberek szerint a „nyájimmunitást” akkor érjük el, ha egy adott idő után a lakosságnak legalább 60%-a védett lesz. Tegyük fel hogy pl. $T = 25$ hét.

- A 60%-os átoltottság elérése után legalább milyen, időben állandó sebességgel kell oltani az éppen nem immunis embereket, hogy a védett személyek aránya ne csökkenjen 60% alá?
- Hány főt kell hetente beoltani egy tízmilliós lakosságú országban?

- Az újonnan beadott védőoltásokkal az időegységenként elvesztett („elbomlott”) oltottak számát szeretnénk pótolni. Ez a mennyiség analóg az aktivitással:

$$A = \frac{\ln 2}{T} N_v.$$

Innen az egy hét alatt oltandó emberek aránya

$$\frac{\Delta N_v}{N_v} = 1 \text{ hét} \cdot \frac{\ln 2}{25 \text{ hét}} \approx 2,77\%.$$

- A teljes népességnek ez 1,66%-a, tízmilliós lakoságnál $\approx 166\,000$ ember hetente. □

$\langle P(2) \rangle = 4,3 \pm 1,4$

Gamma-foton kibocsátásakor és elnyelődésekor az atommag kicsit visszalökődik, illetve meglökődik. Ez beleszól az energiamérlegbe, és ezért a kibocsátott gamma-foton energiája nem azonos azzal, mint amit a mag el tud nyelni. Így az atomoknál megfigyelt optikai rezonancia-abszorpció az atommagoknál nem jön létre. Az egyik lehetséges mód arra, hogy atommagok esetén megfigyeljük a rezonancia-abszorpciót, a Doppler-jelenség kihasználása: a forrást és az abszorbenst nagy sebességgel egymás felé mozgatjuk, például úgy, hogy az egyiket egy gyorsan forgó korongra erősítjük. Mekkora fordulatszámmal kell ehhez forgatnunk egy $r = 5$ cm sugarú korongot, melynek végére egy $E_\gamma = 412$ keV energiájú γ -sugárzást kibocsátó $^{198\text{m}}\text{Hg}$ sugárforrás van erősítve? Adatok: A $^{198\text{m}}\text{Hg}$ atomtömege $M = 197,97$ u, $1 \text{ u} = 931,49 \text{ MeV}/c^2$.

A (meg/vissza)lökődési energiákat a lendület- és energiamegmaradásból számíthatjuk. Mindkét esetben a foton lendületének megfelelő lendületet kap az atommag (ellentétes irányban):

$$\pm p_m = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}.$$

A meglökődési energia csak a lendület négyzetétől függ:

$$E_m = \frac{p_m^2}{2M} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}.$$

A $^{198\text{m}}\text{Hg}$ 412 keV energiájú γ -vonala esetén ez az energia:

$$E_m = 0,46 \text{ eV}.$$

Ahhoz, hogy a céltárgyban lévő ^{198}Hg atommagok képesek legyenek elnyelni a forrás által kibocsátott γ -fotonokat, a Doppler-effektus segítségével $2 \cdot E_m$ energiakülönbségnek megfelelő frekvenciaeltolódást kell elérnünk (nemrelativisztikusan):

$$E'_\gamma = E_\gamma + 2E_m = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

A sebesség innen kifejezhető:

$$2E_m = E_\gamma \cdot \frac{v}{c} \implies v = c \cdot \frac{2E_m}{E_\gamma} \approx 670 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A fordulatszám a sebességből és a korong sugarából számítható:

$$f = \frac{v}{2r\pi} \approx 2,13 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}} = 1,28 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{min}}. \quad \square$$

$\langle P(3) \rangle = 2,12 \pm 1,98$

Becsüljük meg a határozatlansági reláció felhasználásával a harmonikus rezgőmozgást végző kvantumos részecske (oszillátor) potenciális és kinetikus energiájának arányát alapállapotban!

Alapállapotban az oszcillátor nem „mozog”, azaz a lendületének a várható értéke nulla $\langle p \rangle = 0$. Az állapotfüggvénynek azonban véges kiterjedése van (Δx), és így a Heisenberg-összefüggés miatt kell legyen Δp „lendület-kiterjedése” is. Ezek miatt az alapállapot energiája:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}D(\Delta x)^2.$$

Használjuk a Heisenberg-összefüggést (becslésünkhöz tegyük fel hogy egyenlőség áll fenn, hiszen ekkor kerülünk a legközelebb a megszokott klasszikus esethez):

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2\Delta x},$$

ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$E = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}D(\Delta x)^2.$$

Alapállapotban ennek a kifejezésnek a minimumát keressük.

Ehhez használjuk még fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b},$$

ahol az egyenlőség csak $a = b$ esetén áll fenn.

Legyen

$$\frac{a}{2} = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} \equiv E_{\text{kin}}, \quad \frac{b}{2} = \frac{1}{2}D(\Delta x)^2 \equiv E_{\text{pot}}.$$

Ekkor az energia éppen

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \text{const.}$$

Ennek a minimuma $a = b$ esetén jön létre, így

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{a/2}{b/2} = \frac{a}{b} = 1. \quad \square$$

Megj. 1: szélsőértékszámítást deriválással is lehet végezni, ami ugyanerre az eredményre vezet.

Megj. 2: A viriáltétel alkalmazható úgy, ha egy rendszerben két részecske között ható erő

$V(r) = \alpha r^n$ potenciális energiából származik, akkor $2\langle E_K \rangle = n\langle V_{\text{TOT}} \rangle$. Esetünkben $n = 2$.

$\langle P(4) \rangle = 0,87 \pm 1,46$

A magas légkörben alacsony energiájú neutronok $^{14}_7\text{N}$ magokkal való kölcsönhatása során keletkezhet $^{14}_6\text{C}$ radiokarbon mag. A radioaktív $^{14}_6\text{C}$ mag bomlásakor keletkező elektronok maximális energiája $E_0 = 0,156 \text{ MeV}$.

a) Írjuk fel a $^{14}_6\text{C}$ mag bomlásának folyamatát!

b) Milyen részecske keletkezik még az alábbi reakcióban? $n + ^{14}_7\text{N} \rightarrow ^{14}_6\text{C} + ?$

c) Mekkora mozgási energiával keletkezik a $^{14}_6\text{C}$ és a kérdéses részecske?

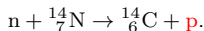
(A bejövő neutron és a nitrogén mag mozgási energiáját hanyagoljuk el.)

Adatok: $m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2$, $m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$.

a) A radiokarbon negatív béta-bomlással bomlik, azaz



b) Tömeg- és töltésmegmaradásból



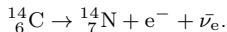
c) A keletkező részecske a $\approx 14 \text{ u}$ tömegű $^{14}_6\text{C}$ és egy proton $m_p \approx 1 \text{ u}$, tehát a két részecske jó közelítéssel 1:14 arányban fog osztozni a reakcióenergián. Mekkora a reakcióenergia?

$$m_n + m_{^{14}\text{N}} = m_p + m_{^{14}\text{C}} + R/c^2 \Rightarrow R/c^2 = m_n - m_p + m_{^{14}\text{N}} - m_{^{14}\text{C}}.$$

$$R/c^2 = m_n - m_p + m_{14\text{N}} - m_{14\text{C}}$$

Itt kikereshetjük a pontos atomtömegeket (táblázat), vagy felhasználhatjuk a megadott adatot.

A $^{14}_6\text{C}$ bomlásakor keletkező elektron maximális energiája 0,156 MeV.



Mivel $m_{14\text{N}} \gg m_e$, ez jó közelítéssel megegyezik a béta-bomlás során keletkező energiával:

$$m_{14\text{C}} = m_{14\text{N}} + m_e + m_\nu + 0,156 \text{ MeV}/c^2.$$

Ezt az egyenletet a reakcióenergia egyenlettel kombinálva ($m_\nu < 0,12 \text{ eV}/c^2$):

$$R/c^2 = m_n - m_p - m_e - 0,156 \text{ MeV}/c^2$$

$$\Rightarrow R = 939,565 \text{ MeV} - 938,272 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} - 0,156 \text{ MeV} = 0,626 \text{ MeV}.$$

Ezen az energián osztoznak $\approx 1:14$ arányban a radiokarbon és a proton, tehát

$$E_p = 0,584 \text{ MeV}, \quad E_{14\text{C}} = 0,0417 \text{ MeV}. \quad \square$$

(Ez egyezik az irodalmi adattal.) A kiküldött feladatsorban hibásan szerepelt az elektron tömege [MeV $\rightarrow$ keV]. Aki azzal számolt, az is maximális pontot kapott ($R' = 1,136 \text{ MeV}$).

$$\langle P(5) \rangle = 2,67 \pm 1,12$$

A $^{137}\text{Cs}/^{137\text{m}}\text{Ba}$ „izotópgenerátort” gyakran használják a radioaktív bomlás bemutatására, a Ba rövid felezési ideje miatt. Ebben a hosszú felezési idejű Cs egy kicsi tartályban van elhelyezve, és termeli leányelemét, a Ba-ot. Szükség esetén a tartály belsejéből a Ba-ot ki lehet oldani (kémiai különbözősége miatt), míg a Cs benne marad. Tegyük fel, hogy egy alkalmazáshoz kioldottuk a tartályban levő összes Ba-ot. Mennyi ideig tart ezután, hogy a tartályban a Ba aktivitása újra elérje a Cs aktivitásának 90%-át? Adatok: a ^{137}Cs felezési ideje $T_1 = 30$ év, a $^{137\text{m}}\text{Ba}$ felezési ideje $T_2 = 2,55$ min.

Útmutatás: Egy bomlási sor második tagjának aktivitása az idő függvényében, általános esetben

$$A_2(t) = A_1(0) \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(2^{-\frac{t}{T_1}} - 2^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (\text{a leányelem mennyisége kezdetben 0}).$$

A Cs (a továbbiakban 1. indexű) és a Ba (a továbbiakban 2. indexű) elég hosszú idő után egyensúlyba kerülnek, a Cs sokkal hosszabb felezési ideje miatt. Ilyenkor időegység alatt ugyanannyi Ba atom keletkezik a Cs bomlásából, mint amennyi radioaktív Ba elbomlik. Ez azt jelenti, hogy az aktivitásaik megegyeznek, azaz $A_1(t) = A_2(t)$.

Ezt az állapotot szekuláris egyensúlynak hívjuk.

Amikor a Ba-ot eltávolítjuk a tartályból, a mennyisége (és ezzel az aktivitása is) 0-ról kezd el növekedni, és tart a Cs aktivitásához, a megadott összefüggés szerint:

$$A_2(t) = A_1(0) \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(2^{-\frac{t}{T_1}} - 2^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

$$A_2(t) = A_1(0) \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(2^{-\frac{t}{T_1}} - 2^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Emeljünk ki a zárójelből $2^{-\frac{t}{T_1}}$ -t, és vegyük észre, hogy $A_1(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_1}} = A_1(t)$:

$$A_2(t) = A_1(t) \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(1 - 2^{-t \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)} \right).$$

A feladat szerint azt a t időt keressük, amelyre igaz az, hogy $A_2(t)/A_1(t) = 0,9$.

$$0,9 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(1 - 2^{-t \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)} \right) \Rightarrow 1 - 0,9 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 2^{-t \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}.$$

Ez az egyenlet már t -re megoldható.

Mivel $T_1 \gg T_2$, ezért $(T_1 - T_2)/T_1 \approx 1$, és $(1/T_2) \gg (1/T_1)$, így egyszerűsíthetjük:

$$0,1 = 2^{-\frac{t}{T_2}} \Rightarrow t = -T_2 \frac{\ln(0,1)}{\ln(2)} \approx 8,47 \text{ perc.} \quad \square$$

(Megjegyzés: az is elfogadható közelítés, hogy a Cs hosszú felezési ideje miatt $A_1(t) \approx A_1(0)$.)

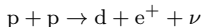
$$\langle P(6) \rangle = 3,77 \pm 1,74$$

A Napban lejátszódó p-p ciklusban a legtöbb neutrínó a $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$ fúziós reakcióból származik, azonban a legnagyobb energiájú neutrínók a Nap belsejében szintén jelen lévő ${}^8\text{B}$ magok pozitív β -bomlása során keletkeznek.

- Számítsuk ki a kibocsátott neutrínók maximális energiáját a protonok fúziója esetén, illetve a ${}^8\text{B}$ pozitív β -bomlása során, ha a ${}^8\text{Be}$ leánymag 2,84 MeV energiájú gerjesztett állapotban keletkezik!
- A 60-as évek végén végzett Davis-kísérlet során a $\nu + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$ magreakciót használták a Napban lejátszódó fúzióból származó neutrínók detektálására (a keletkező, elektronbefogással bomló argont kibuborékolatás után gázionizációs detektorral mérték meg). Mutassuk meg, hogy csak a ${}^8\text{B}$ pozitív β -bomlása során keletkező neutrínók tudják ezt a reakciót kiváltani!

Adatok: A ${}^8\text{B}$ és ${}^8\text{Be}$ atomok tömegei: $M({}^8\text{B}) = 8,024606 \text{ u}$, $M({}^8\text{Be}) = 8,005304 \text{ u}$, $1 \text{ u} = 931,494102 \text{ MeV}/c^2$. A ${}^{37}\text{Cl}$ és ${}^{37}\text{Ar}$ atomtömegei: $M({}^{37}\text{Cl}) = 36,965897 \text{ u}$, $M({}^{37}\text{Ar}) = 36,966770 \text{ u}$, $m_p = 1,00727647 \text{ u}$, $m_e = 5,48579909 \cdot 10^{-4} \text{ u}$, $m_d = 2,01355345 \text{ u}$.

- A kezdeti állapotok és a termékek figyelembe vételével a $p + p$ fúziós reakció és a ${}^8\text{B}$ pozitív β -bomlása során keletkező neutrínók maximális energiája:



$$E_{\nu, \max, 1} = [2m_p - (m_d + m_e + m_\nu)] c^2 \approx [2m_p - m_d - m_e] c^2 = \mathbf{0,420 \text{ MeV}},$$

valamint

a) valamint



$$E_{\nu, \max, 2} = \{M({}^8\text{B}) - 5m_e - [M({}^8\text{Be}) - 4m_e] - m_e\} c^2 - 2,84 \text{ MeV} = \mathbf{14,06 \text{ MeV}},$$

ahol figyelembe vettük, hogy a Nap belsejében a ${}^8\text{B}$ és ${}^8\text{Be}$ atomok túlnyomó többségben teljesen ionizált állapotban vannak jelen.

b) A kísérletben használt magreakció kiváltásához szükséges minimális neutrínóenergia:

$$\begin{aligned} E_{\nu, \min} &= -[m_\nu + M({}^{37}\text{Cl}) - M({}^{37}\text{Ar}) - m_e + m_e] c^2 \approx \\ &\approx -[M({}^{37}\text{Cl}) - M({}^{37}\text{Ar})] c^2 = \mathbf{0,813 \text{ MeV}}, \end{aligned}$$

ahol ismét elhanyagoltuk a neutrínó tömegét. Tehát a kísérletben használt magreakciót a fentiek közül csak a ${}^8\text{B}$ pozitív β -bomlásából származó neutrínók képesek kiváltani. $\square$

$$\langle P(7) \rangle = 2,63 \pm 1,22$$

Anna és Berci egy laboratóriumi mérésben elektronnyaláb mozgását vizsgálták. A jegyzőkönyv szerint az elektronoknak $x = (0,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-10}$ m helyen $v_x = (1,5 \pm 0,4) \cdot 10^7$ m/s a sebessége. Anna szerint a mérésben van valami hiba, de Berci szerint a mérés jó. Kinek van igaza és miért?

A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés szerint

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Itt most

$$\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = 0,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,4 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,64 \cdot 10^{-35} \text{ Js}.$$

Ez **kisebb**, mint

$$\frac{\hbar}{2} \approx 5,27 \cdot 10^{-35} \text{ Js}.$$

Tehát a mérési hiba becslése nem lehet jó – **Annának** van igaza. $\square$

$\langle P(J8) \rangle = 1,89 \pm 2,03$

A paksi atomerőműben 4 reaktor működik.

- Becsüljük meg a 4 reaktorban található összes urán tömegét, ha tudjuk, hogy ennek 1,14%-a hasad el évente! Tegyük fel, hogy a felszabaduló energia nagyrészt az ^{235}U hasadásából ered, és egy évben 330 napot üzemel a reaktor.
- Mekkora lenne a paksi erőművel azonos hőteljesítményű hőerőmű évi fűtőanyag-szükséglete, ha az 24,5 MJ/kg fűtőértékű szenet használna?

Adatok: egy reaktor hőteljesítménye $P_{\text{th}} = 1485 \text{ MW}$, egy hasadásban felszabaduló energia 32 pJ.

- Határozzuk meg egy reaktor aktív zónájában naponként elhasadt ^{235}U magok számát!

$$\frac{\Delta N_U}{\Delta t} = \frac{8,64 \cdot 10^4 \text{ s/nap} \cdot 1,485 \cdot 10^9 \text{ W}}{3,2 \cdot 10^{-11} \text{ J}} = 4,0095 \cdot 10^{24} \frac{1}{\text{nap}}.$$

A naponta egy reaktorban elhasadt ^{235}U össztömege:

$$\frac{\Delta m_U}{\Delta t} = \frac{4,0095 \cdot 10^{24} \text{ 1/nap}}{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}} \cdot 0,235 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 1,5646 \frac{\text{kg}}{\text{nap}}.$$

Évi 330 üzemnappal számolva az elhasadt ^{235}U tömege 516,32 kg/év egy blokkra.
Az ehhez szükséges üzemanyag-töltet

$$m_U = \frac{516,32 \text{ kg/év}}{0,0114 \text{ év}^{-1}} = 45\,291 \text{ kg} \approx 45 \text{ t/blokk} \Rightarrow \text{181 t/4 blokk}.$$

b) A szükséges szén tömege 4 reaktorblokkra számolva:

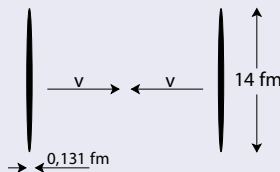
$$\frac{\Delta m_{\text{szén}}}{\Delta t} = 4 \cdot \frac{86\,400 \text{ s/nap} \cdot 1,485 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot 330 \text{ nap/év}}{24,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}} \approx 6,9 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{év}}. \quad \square$$

$$\langle P(J9) \rangle = 2,44 \pm 1,51$$

A Relativisztikus Nehézion-ütköztető (RHIC) gyorsítóberendezés gyűrűiben (például) 14 fm átmérőjű $^{197}_{79}\text{Au}$ atommagok haladnak egymással szemben nagy energián. Ezt a mellékelt ábrán látható módon szokták illusztrálni.

a) Értelmezzük az ábrát!

b) Adjuk meg az arany atommagok nukleononkénti mozgási energiáját!



- a) A felgyorsított atommagok relativisztikus sebességgel mozognak, azaz fellép a **Lorentz-kontrakció**: a laborrendszerből nézve a mozgás irányába eső méretek lerövidülnek. Így lesz a gömb alakú atommagból látszólag „palacsinta”.
- b) Az extrém nagy lapultság fénysebességhez közeli sebességre utal. A „palacsinta” vastagsága a relativisztikusan rövidült gömbátmérő:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma D = D_0 \implies \gamma = \frac{D_0}{D} = \frac{14 \text{ fm}}{0,131 \text{ fm}} = 106,87.$$

Egy nukleon teljes relativisztikus energiája: $E = \gamma m_0 c^2$, a mozgási energia (a nukleonokat $m_0 = 1u$ -val számítva)

$$E_m = (\gamma - 1)uc^2 \approx 1,59 \cdot 10^{-8} \text{ J} \approx 99 \text{ GeV}. \quad \square$$

$$\langle P(J10) \rangle = 2,22 \pm 2,11$$

Egy, a Nap körül ellipszis pályán keringő, fekete gömbnek tekinthető űrszonda legmagasabb (Kelvinben mért) egyensúlyi hőmérséklete $2T_0$ [K], a legalacsonyabb pedig T_0 [K]. Napközben a Naptól való távolsága 1 CsE (csillagászati egység, a Föld közepes távolsága a Naptól).

a) Mekkora a maximális és a minimális egyensúlyi hőmérséklete a szondának?

b) Hány év a szonda T_{sz} keringési ideje?

Adatok: Napállandó a Nap-Föld távolságnál: 1360 W/m^2 , Boltzmann áll.: $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.

a) Alkalmazzuk a Stefan-Boltzmann törvényt az r sugarú gömb két helyzetére:

$$S_1 r^2 \pi = \sigma (2T_0)^4 \cdot 4r^2 \pi \quad \text{napközben}$$

$$S_2 r^2 \pi = \sigma (T_0)^4 \cdot 4r^2 \pi \quad \text{naptávolban,}$$

ahol S_1 és S_2 a Naptól mért távolság négyzetével fordítottan arányos helyi napállandók.

Az állandósult legmagasabb és legalacsonyabb hőmérsékleteteket az első egyenletből kapjuk:

$$2T_0 = \sqrt[4]{\frac{S_1}{4\sigma}} = 278,27 \text{ K} = 5,27 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{napközben}$$

$$T_0 = 139,13 \text{ K} = -133,86 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{naptávolban.}$$

- b) A napközeli és naptávoli Stefan-Boltzmann egyenletek hányadosából a napállandókra kapjuk a $S_1/S_2 = 2^4 = 16$ arányt. Ebből a szonda R_1 napközeli és R_2 naptávoli távolságainak arányára kapjuk:

$$16 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1/R_1^2}{1/R_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \implies \frac{R_2}{R_1} = 4.$$

De a feladat szerint napközelen a távolsága éppen 1 CsE, így $R_1 = 1$ CsE és $R_2 = 4$ CsE, ebből az űrszonda pályájának fél nagytengelye

$$a = \frac{R_1 + R_2}{2} = 2,5 \text{ CsE}.$$

Kepler II. törvényét alkalmazva az űrszonda és a Föld keringésére, kapjuk:

$$\frac{T_{sz}^2}{T_F^2} = \frac{(2,5 \text{ CsE})^3}{(1 \text{ CsE})^3} \implies T_{sz} = T_F \sqrt{2,5^3} = 3,95 T_F = \text{3,95 év.} \quad \square$$

$\langle P(S8) \rangle = 3,67 \pm 1,24$

Egy Compton-szórás vizsgáló kísérletben a $\lambda_1 = 0,01 \text{ nm}$ hullámhosszúságú röntgenfotonok paraffinból elektronokat löknek ki. A kísérletben csak a beeső nyaláb irányához képest 8 fokban Compton-szóródott röntgenfotonok által meglökött elektronokat vizsgálják. A Compton-szórás szempontjából az elektronok szabad elektronoknak tekinthetők. Egy másik kísérletben a 1,5 eV kilépési munkájú fémből léptetnek ki elektronokat bizonyos λ_2 hullámhosszúságú monokromatikus fénnel. Mind a fémből kiléptetett, mind pedig a paraffinból kilökött (vizsgált) elektronok azonos U_z feszültségű ellentérrel fékeezhetők le.

a) Mekkora az elektronokat lefékező ellenterek U_z zárófeszültsége?

b) Milyen tartományba esik, és mekkora a fotoeffektust kiváltó fény λ_2 hullámhossza?

Adatok: Planck-állandó: $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$,

Compton-hullámhossz: $\lambda_C = h/(m_e c) = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

a) Számítsuk ki a Compton-szórásakor a foton hullámhossz-változását:

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta) \approx 2,365 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

Így a fotonok megnövekedett hullámhossza

$$\lambda' = 10^{-11} \text{ m} + 2,365 \cdot 10^{-14} \text{ m} \approx 1,00236 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

- a) Így a foton energiavesztése, amely megegyezik a meglökött elektron mozgási energiájával, kiszámítható:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{kin}} &= \Delta E_{\text{foton}} = h \cdot c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) = \frac{h \cdot c}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \Delta\lambda \approx \\
 &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^{-11} \text{ m} \cdot 1,000236 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \cdot 2,365 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 4,692 \cdot 10^{-17} \text{ J} \approx 293 \text{ eV}.
 \end{aligned}$$

Vagyis az ellenterek feszültsége mindkét esetben **293 V**.

- b) A fotoeffektusnál alkalmazott fény hullámhosszát a fotoeffektus egyenletéből számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}
 h \cdot \frac{c}{\lambda_2} &= E_{\text{ki}} + W_{\text{kin}} \\
 \lambda_2 &= \frac{hc}{E_{\text{ki}} + W_{\text{kin}}} \approx \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,7 \cdot 10^{-17} \text{ J} + 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \approx 4,22 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx \mathbf{4,2 \text{ nm}}.
 \end{aligned}$$

Vagyis az alkalmazott fény az **EUV* - Röntgen*** tartomány határába esik. $\square$

(A feladatot eredetileg $\lambda_1 = 0,1 \text{ nm}$ -el szántuk, akkor $2,93 \text{ V}$ és $280 \text{ nm} \rightarrow \text{UV.}$)

$$\langle P(S9) \rangle = 3,85 \pm 1,67$$

Tudjuk, hogy párkeltés során a kiindulási foton és a keletkezett elektron-pozitron pár mellett mindig kell, hogy legyen egy „negyedik partner” is ahhoz, hogy az energia- és lendület-megmaradási törvényeket egyszerre teljesíteni lehessen. A legtöbb esetben ez a negyedik partner egy nehéz atommag. Legalább mekkora $E_{\min}$ fotonenergia kell ahhoz, hogy ez a negyedik test egy „nyugvó” elektron lehessen? (Az energiát praktikus az elektron nyugalmi energiájának egységében megadni.)

A megoldás kulcs lépése azt felismerni (és leírni), hogy a párkeltési küszöbön a párkeltés után a **tömegközépponti rendszerben** nincs kinetikus energia, csak a keletkezett részecskék nyugalmi energiája. Ebben az esetben szükséges a lehető legkevesebb energia.

Többrészecske-rendszerekre is érvényes a relativisztikus energia összefüggés

$$\mathcal{E}^2 = (Pc)^2 + (M_0 c^2)^2,$$

ahol $\mathcal{E}$, P , M_0 a rendszer teljes energiája, lendülete és nyugalmi tömege.

Kifejezhető a rendszer invariáns (nyugalmi) tömege

$$\mathcal{E}^2 - (Pc)^2 = (M_0 c^2)^2,$$

ami inerciarendszer-független ($\Rightarrow$ négyesimpulzus-megmaradás).

Ebben az egyenletben két ismeretlenünk van, de két inerciarendszerben külön-külön felírva az invariáns tömeget már lesz két egyenletünk hogy a két ismeretlent kifejezzük.

A két praktikus viszonyítási rendszer a laborrendszer és a tömegközépponti (TKP) rendszer, ahol a rendszer teljes lendülete definíció szerint 0, megkönnyítve a számítást.

Jelöljük a foton kérdéses bejövő energiáját E -vel, lendületét p -vel; ekkor $E = pc$.

Fejezzük ki a *foton+elektron rendszer* invariáns tömegét a párkeltés előtti pillanatban!

A TKP rendszerben definíció szerint az összlendület $P = 0$.

A laborrendszerben a teljes energia a foton pc energiája plusz a nyugvó elektron $m_0 c^2$ nyugalmi energiája, és minden lendületet a bejövő foton hordoz:

$$\begin{aligned} (M_0 c^2)^2 &= \underbrace{\mathcal{E}^2 - (Pc)^2}_{\text{TKP}} = \underbrace{\mathcal{E}'^2 - (P'c)^2}_{\text{labor}} = (M_0 c^2)^2 \\ \underbrace{E_{\text{TKP}}^2 - 0}_{\text{TKP}} &= \underbrace{\left[pc + m_0 c^2 \right]^2 - (pc)^2}_{\text{labor}}. \end{aligned} \quad (\text{párkeltés előtt})$$

A TKP rendszerben a párkeltés után a keletkezési küszöbön definíció szerint nincs kinetikus energia (a foton épp annyi energiát hoz be hogy a párkeltés létrejöhessen), így minden energiát az eredeti elektron, illetve a keletkezett elektron-pozitron pár nyugalmi energiája ad ki.

$$E_{\text{TKP}} = m_0 c^2 + (m_0 c^2 + m_0 c^2) = 3m_0 c^2. \quad (\text{párkeltés után})$$

Az energiamegmaradás értelmében E_{TKP} ugyanaz a párkeltés előtt és után, behelyettesítve:

$$\left(3m_0 c^2 \right)^2 = \cancel{(pc)^2} + 2 \cdot pc \cdot m_0 c^2 + \left(m_0 c^2 \right)^2 \cancel{-(pc)^2}.$$

A megmaradó $pc = E$ tag épp a foton keresett bejövő energiája (laborrendszerben), azaz

$$9(m_0 c^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = 2 \cdot E \cdot m_0 c^2 \implies E = 4m_0 c^2. \quad \square$$

Alternatív megoldás: Ha a keletkezési küszöbön a tömegközépponti rendszerben nincs kinetikus energia, az annak felel meg, hogy a párkeltés után a 2 elektron és 1 pozitron együtt mozog, azaz egyforma lendülettel rendelkezik.

Ezzel felírható az energia- és lendületmegmaradás a párkeltés előtt (bal) és után (jobb):

$$\vec{p}_f = 3\vec{p}_e$$

$$E_f + m_e c^2 = p_f c + m_e c^2 = 3 \cdot \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

A lendületmegmaradásból $p_e = p_f/3$, ezt a másodikba helyettesítve:

$$p_f c + m_e c^2 = 3 \sqrt{\left(\frac{p_f c}{3}\right)^2 + (m_e c^2)^2} \quad (\text{négyzetre emelve})$$

$$\cancel{(p_f c)^2} + 2p_f c \cdot m_e c^2 + (m_e c^2)^2 = 9 \frac{\cancel{(p_f c)^2}}{9} + 9(m_e c^2)^2 \quad (/(2m_e c^2))$$

$$E_f = p_f c = 4m_e c^2. \quad \square$$

Megjegyzés: általánosíthatunk tetszőleges M tömegű negyedik partner esetére. Ekkor a megoldás $E_{\min} = 2m_e c^2(1 + m_e/M)$. $M = m_e$ speciális esetben $E_{\min} = 4m_e c^2$. A „klasszikus” közelítésben $M \rightarrow \infty$, és így kapjuk az ismerős eredményt, hogy $E_{\min} = 2m_e c^2$.

$$\langle P(S10) \rangle = 1,24 \pm 1,67$$