Egyenletesen töltött gömb elektrosztatikus erőtere, az alfa-részecskére ható erő, valamint az alfa-részecske elektrosztatikus potenciális energiája a Rutherford-kísérletben

Amikor Rutherford a kísérleteit elkezdte, az anyag felépítésével kapcsolatban a **Thomson féle atommodellt** gondolták érvényesnek. Eszerint az atomok nagy tömegű, pozitív elektromos töltésű „anyaga" egy R sugarú gömb, és ebben foglalnak helyet a nagyon kis tömegű elektronok („mazsolás puding-modell", vagy „görögdinnye-modell").

Amikor a pozitív töltésű alfa-részecske közeledik egy ilyen atomhoz, az elektrosztatikus kölcsönhatás miatt az atomban lévő elektronok elmozdulnak, akár ki is szakadhatnak az atomból, az alfa részecske pályáját mégsem tudják befolyásolni, hiszen a tömegük kb. nyolcezerszer kisebb. Ezért az alfa-részecske pályáját egyedül a pozitív töltésű, nagy tömegű, rész tudja módosítani. Elegendő tehát azt vizsgálni, hogy milyen a kölcsönhatás egy homogénen töltött R sugarú gömb, és egy - pontszerűnek tekinthető – ugyancsak pozitív töltésű részecske között. Fontos, hogy kizárólag elektrosztatikus kölcsönhatást veszünk figyelembe, azaz a „puding" anyaga puha, abba az alfa-részecske akár be is hatolhat, ha azt az elektrosztatikus erők megengedik!

Egy feltöltött gömb maga körül $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektrosztatikus erőteret hoz létre, ebben egy q töltésre ható erő: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

A továbbiakban az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erőtér meghatározásával foglalkozunk, amely egy vektortér (a vektorokat vastag betűvel jelezzük).

Gauss tétele alapján $\oint \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$, ahol ε_0 a vákuum permittivitása; az integrálást egy zárt felületre kell elvégezni, és Q jelenti a zárt felületen belül lévő összes töltést.

Gömbszimmetria lévén a térerősség csak a sugár abszolút értékétől függ, és a tér erővonalai sugárirányúak. Ezért a térerősség és a $\mathrm{d}\mathbf{F}$ felületi vektor skalárszorzata a két vektor abszolút értékének a szorzata lesz: $\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = E(r)\cdot \mathrm{d}F$. Ezért egy r sugarú gömbre a felületi integrál kiszámítható: $\oint \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \oint E(r)\cdot \mathrm{d}F = E(r)\cdot 4\pi r^2$.

Miután a Gauss-tétel bal oldalán lévő integrált kiszámítottuk, foglalkozzunk a jobb oldalon álló töltéssel, ami a felület által közrezárt töltés. Két esetet kell megkülönböztessünk:

a) Ha $r \ge R$, azaz a gömb, amire integráltunk teljesen magába zárja az „atomot". Ekkor a gömb r sugarától függetlenül mindig ugyanannyi töltés lesz a felületen belül: az atom teljes pozitív töltése: Ze (itt Z az atom rendszáma, e pedig az elemi töltés). Ebben az estben tehát azt kapjuk, hogy $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\varepsilon_0}$, amiből a térerősség: $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze}{r^2}$. Figyelembe véve az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})$ összefüggést, valamint azt, hogy az alfa-részecskére $q = 2e$, kapjuk a jól ismert Coulomb féle erőtörvényt: $\boxed{F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze\cdot 2e}{r^2}}$.

b) Más a helyzet, ha $r < R$, azaz az integrálási (gömb)felületünk az atom „belsejében" van. Ekkor az atom töltésének csak egy hányadát zárjuk körül, tehát a Gauss-tétel jobb oldalán lévő **Q** mennyiség **Ze**-nél kevesebb lesz. Egyenletesen töltött gömb esetén a körbezárt töltés a körbezárt térfogattal arányos, ezért tehát a Gauss-tétel jobb oldalára a következő töltést kell írjuk: $Q = Ze\cdot\dfrac{\frac{4\pi}{3}r^3}{\frac{4\pi}{3}R^3}$. A Gauss-tétel alakja tehát: $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Ze}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{r^3}{R^3}$. Ebből végülis a térerősségre $E(r)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Ze}{R^3}\cdot r$, adódik.

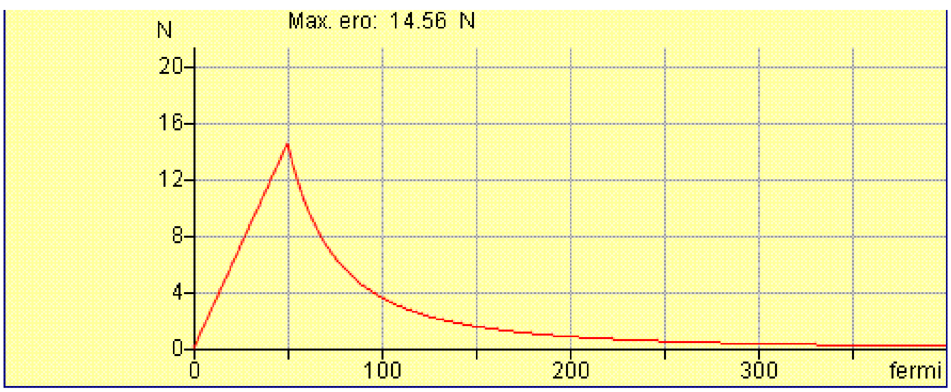
Az alfa-részecskére ható erő pedig: $\boxed{F(r)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Ze\cdot 2e}{R^3}\cdot r}$.

Látjuk, hogy a részecskére ható erő az r = 0 helyen – a középpontban – eltűnik. Fizikai érzékünk szerint ennek így is kell lennie, hiszen a tökéletes szimmetria miatt az eredő elektrosztatikus erőnek mindenképpen nullának kell lenni.

Összefoglalva: az egyenletesen töltött gömbtől *r* távolságra az alfa-részecskére ható (sugárirányú) erő:

$$\boxed{F(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Ze\cdot 2e}{R^3}\cdot r, & \text{ha } r<R\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Ze\cdot 2e}{r^2}, & \text{ha } r\geq R\end{cases}}.$$

Ezt ábrázolja az alábbi ábra (egy R = 50 fm sugarú gömbre), és ezt figyelhetjük meg a szimuláció „**Erő**” rajzoló ablakában is.



Ebből az erőtörvényből már könnyen származtathatjuk a kölcsönhatási potenciált is.

Mint ismeretes, konzervatív erőtérben (és az elektrosztatikus erőtér ilyen) a potenciálból az erő gradiens-képzéssel képezhető, azaz $\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\mathrm{grad}U(\mathbf{r})$. Mivel most gömbszimmetrikus esetről van szó, minden csak a sugár abszolút értékétől függ, ezért $E(r)=-\dfrac{\partial}{\partial r}U(r)$. Ebből az egyenletből a potenciál integrálással képezhető.

Megállapodás szerint a potenciál 0 helyét a „végtelen távoli” pontban vesszük, ezért $U(r)=-\int_\infty^r E(r')\mathrm{d}r'$. Mivel az erőtörvény különböző a töltött gömbön kívül és azon belül, ezért ez az integrál is két részből áll. Ha $r\geq R$, akkor $U(r)=-\dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r\dfrac{1}{r'^2}\mathrm{d}r'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Ze}{r}$.

Ha pedig $r<R$, akkor az integrálást tovább kell folytatni „befelé” az r=R helytől:

$$U(r) = U(R) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{R^3} \int_R^r r' \mathrm{d}r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{R^3} \left(R^2 - \left[\frac{r^2}{2} \right]_R^r \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{R^3} \left(R^2 - \frac{r^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right)$$

Végül kapjuk: $\boxed{U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{r}, & \text{ha } r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze}{2R^3} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{ha } r < R \end{cases}}$.

Az alfa-részecske potenciális energiája a potenciálból egyszerűen kapható: $E_{pot}(r) = 2e \cdot U(r)$

Ezt ábrázolja az alábbi ábra (egy R = 50 fm sugarú gömbre), és ezt figyelhetjük meg a szimuláció „**Potenciál**" rajzoló ablakában is. A vízszintes lila vonal az alfa-részecske teljes energiáját mutatja, ami $E = E_{kin} + E_{pot}$ (az ábrán E = 3 MeV). Mivel az E_{kin} mozgási energia nem lehet negatív, ezért az alfa-részecske csak addig közelítheti meg a magot, amíg $E_{pot} < E$, azaz amíg a vízszintes vonal a potenciális energia vonala fölött halad (kb. 75 fm).