

7. előadás

TARTALOMJEGYZÉK

- Differenciális hatáskeresztmetszetek
- Energia szerint, szög szerint, térszög szerint
- Kemény gömb differenciális szórási hatáskeresztmetszete
- Rutherford-szórás hatáskeresztmetszete
- Magfüggvények
 - Szórási magfüggvény
 - Hasadási magfüggvény

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

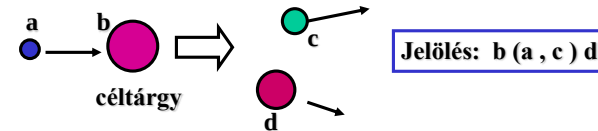
1

Mag- és neutronfizika

7. előadás

Emlékeztető:

atommagreakció: $a + b \longrightarrow c + d$



Reakcióenergia: $Q = (M_a + M_b - M_c - M_d) \cdot c^2$

Reakciósebesség: $R = \phi \cdot N \cdot \sigma$

Fluxus: ϕ Céltárgy atomok száma: N

Mikroszkopikus hatáskeresztmetszet:

$$\sigma = \frac{R}{N \cdot \phi}$$

atomsűrűség

Makroszkopikus hatáskeresztmetszet:

$$\Sigma = \rho \cdot \sigma$$

I. additivitás: $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f + \dots$ (több fajta reakció)

II. additivitás: $\Sigma_t(\text{össz}) = \Sigma_t(1) + \Sigma_t(2) + \dots \Sigma_t(N)$ (több anyag)

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

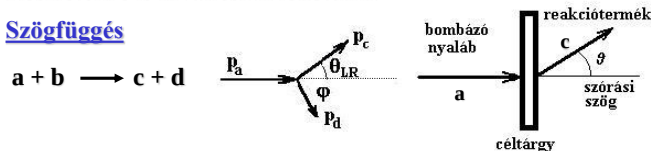
2

Differenciális hatáskeresztmetszet

Hatáskeresztmetszet: $\sigma = \frac{R}{N \cdot \phi}$ — Annak a „sebessége”, amire éppen kíváncsiak vagyunk.

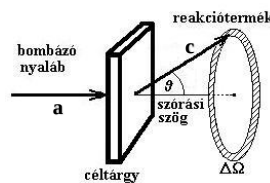
Részletekre is kíváncsiak lehetünk!

Szögfüggés



Három dimenzióban:

Arra vagyunk „kíváncsiak”, hogy adott N és ϕ mellett időegység alatt hány részecske lép ki a $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ szögintervallum által meghatározott $d\Omega$ térszögbe.



2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

3

Kis geometriai kitérő.

Ismert:

szög (radiánban) = (ív a kör kerületén) / R

Maximális szög = $(2\pi \cdot R) / R = 2\pi$

Térszög = (felület a gömb felszínén) / R^2

Maximális térszög = $(4\pi \cdot R^2) / R^2 = 4\pi$

Térszög mértékegysége: szteradián

$(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ közötti térszög meghatározása:

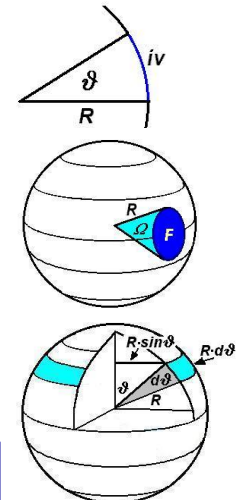
Felület = $2\pi \cdot (R \sin \vartheta) \cdot (R \cdot d\vartheta)$

Térszög: $d\Omega = 2\pi \cdot \frac{(R \sin \vartheta) \cdot (R \cdot d\vartheta)}{R^2} = 2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$

A $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ közötti sáv térszöge tehát:

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

(hengersizmetrikus esetben)



2017

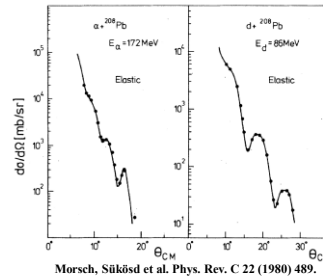
Reaktorfizika szakmérnököknek

4

Differenciális hatáskeresztmetszet: valamilyen paraméter szerint „szétbontott” hatáskeresztmetszet

A **térszög** szerint szétbontott:
Mértékegysége: barn/steradián

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\vartheta) \quad \leftarrow \text{A szórási szögtől függ}$$



Morsch, Sükösd et al. Phys. Rev. C 22 (1980) 489.

Az összes szögre integrálva

$$\int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \sigma \quad \text{visszakapjuk a teljes hatáskeresztmetszetet}$$

Időnként nem a térszög szerint, hanem a **szög** szerint bontjuk szét:

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = 2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}, \text{ mint az könnyen belátható.}$$

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

5

Két példa:

1. példa: Rutherford-szórás szögfüggése (**elméletileg** levezethető, pontoszerű nehéz szórócentrumon való **Coulomb-szórásra**)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \overset{\text{rendsám}}{(Ze)^2 \cdot (2e)^2} \cdot \frac{1}{16 \cdot E_{\text{kinetikus}}^2} \cdot \overset{\text{szögfüggés}}{\left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^4}$$

α -részecske mozgási energiája

Rutherford, Geiger és Marsden kiterjedt **kísérletsorozatban** igazolták a szögfüggést, a rendszámfüggést, és a mozgási energiától való függést is (ld. következő dia).

Ez bizonyítja, hogy a Rutherford-szórás Coulomb-szórás !

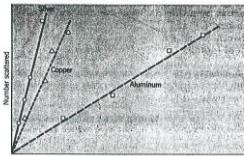
Érdekesség: $\int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \infty$ Belátni: házi feladat!

Ez amiatt van, mert a Coulomb-kölcsönhatás hatótávolsága végtelen (az erővonalak a végtelenbe nyúlnak). A teljes „hatásos” keresztmetszet tehát végtelen nagy lesz.

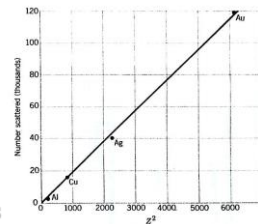
2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

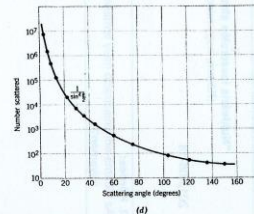
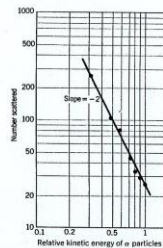
6



A minta vastagságától való függés



A rendszámtól való függés



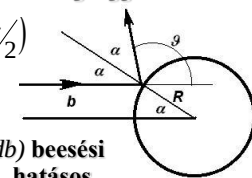
Az α -rész energiájától való függés A szórási szögtől való függés

Ábrák forrása: Kenneth Krane: Introductory Nuclear Physics (John Wiley and Sons 1988) 400-401.

2. példa: „Kemény gömbön” történő szórás szögfüggése

Az ábra alapján: $\vartheta = \pi - 2\alpha$ ($\alpha \leq \pi/2$)
tehát $d\vartheta = -2 \cdot d\alpha$

A „beesési paraméter”: $b = R \cdot \sin \alpha$
tehát $db = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha$



A $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ szögintervallumhoz $(b, b - db)$ beesési paraméter intervallum tartozik. Ezért a „hatásos keresztmetszet”, amely ilyen szögintervallumba történő szóráshoz vezet: $d\sigma = -2\pi \cdot b \cdot db$ (mivel $db < 0$)

Ide behelyettesítve az előzőeket:

$$d\sigma = -2\pi \cdot (R \cdot \sin \alpha) \cdot (R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha) = -\pi \cdot R^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot d\alpha$$

Térjünk át α -ról ϑ -ra: $d\sigma = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \sin(\pi - \vartheta) \cdot d\vartheta$

Ebből kapjuk: $\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \sin \vartheta$ **Illetve:** $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$

Vegyük észre, hogy $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ jellemző a kölcsönhatásra!!

A teljes hatáskeresztmetszetre pedig (kiintegrálva): $\sigma = \pi \cdot R^2$

2017

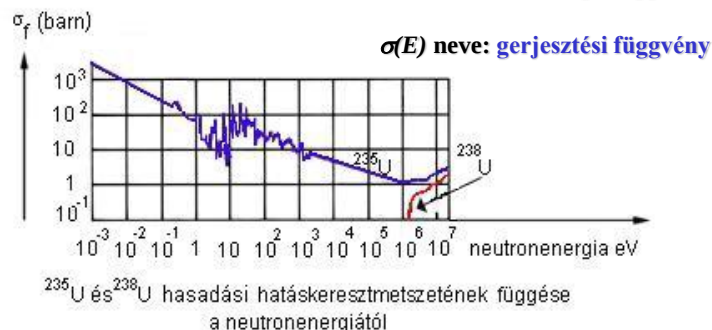
Reaktorfizika szakmérnököknek

8

Hatáskeresztmetszetek energiafüggése

Hatáskeresztmetszet: $\sigma(E) = \frac{R}{N \cdot \phi(E)}$ A fluxusban különböző energiájú részecskék lehetnek!

Különböző energiájú bombázó részecskék más valószínűséggel okoznak reakciót: a hatáskeresztmetszet is tehát energiafüggő lesz.



2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

9

Példa: Tegyük fel, hogy a fluxus az ábra szerint változik! Mekkora lesz a $^{235}\text{U}(n,f)$ reakciónak a sebessége, ha a neutron energiája az (E_1, E_2) intervallumba esik?

$R = N \cdot \phi \cdot \sigma$ alapján dE energiatartományra eső reakciósebesség:

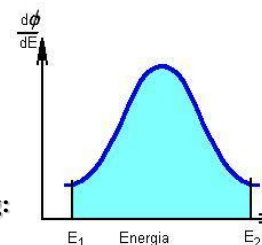
$$dR = N \cdot \frac{d\phi}{dE} \cdot \sigma(E) \cdot dE$$

A kérdésre a választ tehát egy integrál adja meg:

$$R(E_1, E_2) = N \cdot \int_{E_1}^{E_2} \frac{d\phi}{dE} \cdot \sigma_f(E) \cdot dE$$

Ide az előző ábrán látott hatáskeresztmetszetet kell beírni

Ennek a dimenziója: $1/(\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{eV})$



2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

10

Magfüggvények

Reaktorfizikában fontosak azok a magreakciók, amelyek

- neutronok által kiváltottak
- végállapotban is van(nak) neutron(ok)

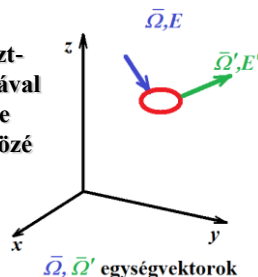
Ilyenek pl. neutronok rugalmas és rugalmatlan szóródása, maghasadás, $(n,2n)$ reakciók stb.

Szórási magfüggvény

Annak a szórási reakciónak a hatáskeresztmetszete, amely egy $\vec{Q}$ irányba E energiával repülő neutron az $(\vec{Q}', \vec{Q}' + d\vec{Q}')$ térszögbe szór, s amelynek energiája $(E', E' + dE)$ közé esik: $\sigma_s(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \vec{Q}') dE' d\vec{Q}'$

A korábban bevezetett teljes szórási hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_s(E) = \int \int_{4\pi} \sigma_s(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \vec{Q}') dE' d\vec{Q}'$$



2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

11

Néhány kristály kivételével $\sigma_s(E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \vec{Q}')$ nem függ külön $\vec{Q}$ és $\vec{Q}'$ -től, csak az általuk bezárt szögtől, azaz az $(\vec{Q} \cdot \vec{Q}')$ skalár szorzattól.

Ha még ettől sem, akkor a szórás **izotróp**: $\sigma_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \sigma_s(E \rightarrow E')$

Hasadási magfüggvény

Specialítások:

- A végállapotban több neutron is lehet: ν
- A keletkező neutronok irányeloszlása **izotróp**
- A keletkező neutronok energia-eloszlása $f(E')$ nem függ E -től
- A keletkező neutronok száma $\nu(E)$ nem függ E' -től.

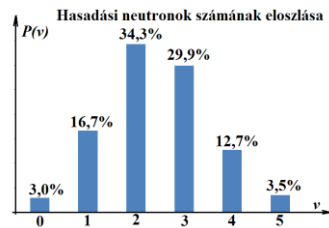
$$\text{Ezért } \Sigma_f(E \rightarrow E', \vec{Q} \cdot \vec{Q}') = \frac{1}{4\pi} \cdot f(E') \cdot \nu(E) \cdot \Sigma_f(E)$$

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

12

Hasadási neutronok számának eloszlása ^{235}U termikus neutronok hatására történő maghasadásánál



Számításoknál és szimulációnál ezt az eloszlást is figyelembe kell venni.

2017

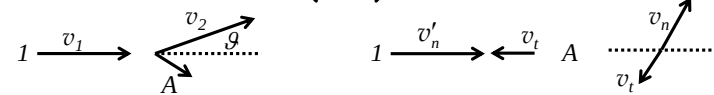
Reaktorfizika szakmérnököknek

13

Példa magfüggvény meghatározására

Rugalmas neutronszórás A tömegszámú atommagon ($m_n = 1$)

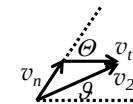
Laboratóriumi rendszer $\longleftrightarrow$ Tömegközépponti rendszer



A TKP rendszer sebessége a labor rendszerben: $v_t = v_1 \frac{1}{A+1}$
(ez lesz a céltárgy sebessége is a TKP rendszerben)

A neutron sebessége TKP rendszerben $v'_n = v_1 - v_t = v_1 \frac{A}{A+1}$
(ütközés után ugyanennyi, csak az iránya más: $v'_n = |v_n| \frac{A}{A+1}$)

A neutron sebessége labor rendszerben
az ütközés után: $\vec{v}_2 = \vec{v}_n + \vec{v}_t$



2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

14

A vektorháromszögben koszinusz tétellel:

$$v_2^2 = v_n^2 + v_t^2 + 2v_n v_t \cos \theta = v_1^2 \frac{A^2 + 2A \cos \theta + 1}{(A+1)^2}$$

Legyen $\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$, ezzel

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \theta]$$

Nilván $\alpha E_1 \leq E_2 \leq E_1$, mivel $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

Azt, hogy milyen az $E_1 \rightarrow E_2$ szóródás valószínűsége, az határozza meg, hogy $\cos \theta$ milyen eloszlású.

Először nézzük meg, mit kapunk, ha feltesszük, hogy a szórás a tömegközéppont rendszerben **izotróp**!

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

15

Izotróp szóródás esete

Izotróp azt jelenti, hogy minden $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ térszögelembe azonos valószínűséggel mutat a vektor.

Hengerszimmetriát feltételezve (miért is lehet?!) φ szerint kiintegrálhatunk, és kapjuk: $d\Omega = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$

Jelöljük: $\mu_c = \cos \theta$

Ezzel: $d\Omega = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot d(\cos \theta) = 2\pi \cdot d\mu_c$

Az izotróp eloszlás miatt a valószínűség-sűrűség: $\frac{d\Omega}{4\pi}$
azaz $p(\mu_c) d\mu_c = \frac{d\Omega}{4\pi}$, és emiatt $p(\mu_c) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

Fejezzük ki $d\mu_c$ -t az energiákkal!

Láttuk, hogy $E_2 = E_1 \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \theta] = \frac{E_1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cdot \mu_c]$

Ezért $dE_2 = \frac{E_1}{2} (1-\alpha) \cdot d\mu_c$, amiből $d\mu_c = \frac{2}{E_1(1-\alpha)} \cdot dE_2$

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

16

Így tehát az E_1 -ből E_2 -be szóródás valószínűsége:

$$g(E_1 \rightarrow E_2) dE_2 = p(\mu_c) d\mu_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{E_1 \cdot (1-\alpha)} dE_2$$

Innen kapjuk:
$$g(E_1 \rightarrow E_2) = \begin{cases} \frac{1}{E_1 \cdot (1-\alpha)}, & \text{ha } \alpha \cdot E_1 \leq E_2 \leq E_1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A függvény végül:
$$\Sigma_s(E_1 \rightarrow E_2) = \Sigma_s(E_1) \cdot g(E_1 \rightarrow E_2)$$

Egyáltalán szóródjon

Annak valószínűsége, hogy E_1 -ből éppen E_2 -be szóródjon

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

17

Anizotróp szóródás esete

Ha a szórás nem lenne izotróp akkor természetesen:

$$g(E_1 \rightarrow E_2) = \begin{cases} \frac{2 \cdot p(\mu_c)}{E_1 \cdot (1-\alpha)}, & \text{ha } \alpha \cdot E_1 \leq E_2 \leq E_1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyzések

TKP-ben és **izotróp** esetben a $\mu_c = \cos \theta$ átlaga:

$$\langle \mu_c \rangle = \int_{-1}^{+1} \mu_c \cdot p(\mu_c) \cdot d\mu_c = 0$$

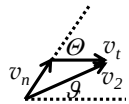
Laboratóriumi rendszerben azonban $\langle \cos \theta \rangle \neq 0$! még akkor sem, amikor a tömegközéppontban **izotróp!**

Számoljuk ki!

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

18



Ennek alapján $v_2 \cos \theta = v_t + v_n \cdot \cos \theta$

azaz
$$\cos \theta = \frac{v_t + v_n \cdot \cos \theta}{v_2}$$

Minden sebességet v_1 -el kifejezve és behelyettesítve kapjuk

$$\cos \theta = \frac{\frac{v_1}{A+1} + \frac{A \cdot v_1}{A+1} \cdot \cos \theta}{\frac{v_1}{A+1} \sqrt{A^2 + 2A \cdot \cos \theta + 1}}$$

Egyszerűsítés után:
$$\cos \theta = \frac{1 + A \cdot \cos \theta}{\sqrt{A^2 + 2A \cdot \cos \theta + 1}}$$

Azaz az átlag:
$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1 + A \cdot \cos \theta}{\sqrt{A^2 + 2A \cdot \cos \theta + 1}} d(\cos \theta) = \frac{2}{3A}$$

Laboratóriumi rendszerben a szórás anizotróp még akkor is, amikor a tömegközépponti rendszerben izotróp!

2017

Reaktorfizika szakmérnököknek

19