

Béta bomlás és a neutrínó

(Dr. Sükösd Csaba)

Tartalom

- A béta bomlás alapjai
- A béta-bomlás Fermi féle elmélete
- Fermi és Gamow-Teller átmenetek
- Paritásváltás, Wu-kísérlet
- Leptonok „családjai”, leptontöltés megmaradása
- Nap-neutrínó rejtély
- Neutrínó oszcilláció

E-mail: sukosd@reak.bme.hu

1

A béta-bomlás alapjai

Három téma:

- ~~A béta-bomlás energetikai viszonyainak tisztázása~~ (lásd. KisMagFiz)
- A kibocsátott elektron/pozitron (folytonos) energiaspektruma (átmeneti valószínűség az elektron energiájának a függvényében)
- Az integrális átmeneti valószínűség (bomlás bármely energiával)

Kiindulópont:

A kvantummechanika alapján elektron nem lehet kötve az atommagban
→ az elektron- antineutrínó pár a kölcsönhatás pillanatában **keletkezik!**

Megjegyzés:

Részecskefizikában a mellékelt kép alapján írjuk le a béta-bomlást, de itt mi „klasszikus” magfizikai leírást adunk! $M(W^\pm) = 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV}/c^2$

→ **nagyon rövid hatótávolság**

2

A kibocsátott elektronok energiaspektruma

Kiinduló pont:

Fermi „Arany szabály”:

$$\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{i,f}|^2 \rho(E_f)_{E_e}$$

Parciális bomlásiállandó Végállapot sűrűség: $\rho(E_f)_{E_e} = \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$

Kölcsönhatási mátrixelem

Mindkét faktor függhet a **kibocsátott részecskék energiájától**
→ a spektrum alakjára befolyással vannak

A mátrixelem kiszámítása

$$V_{i,f} = g \int \Psi_f^* \hat{H}_\beta \Psi_i d^3r$$

($\hat{H}_\beta$ a kölcsönhatási operátor, g a kölcsönhatás „erőssége”)

A kezdeti állapotban csak atommag van: $\Psi_i = \psi_i$

Végállapotban: atommag + elektron + (anti)neutrínó: $\Psi_f^* = \psi_f^* \varphi_e^* \varphi_\nu^*$

Így a mátrixelem: $V_{i,f} = g \int \psi_f^* \varphi_e^* \varphi_\nu^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r$

3

Első közelítésben: $\varphi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}$ és $\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}$ (síkhullámok)
 $\mathbf{p}$ az elektron impulzusa, és $\mathbf{q}$ a neutrínóé. V a normálási térfogat.

További közelítések:

- Az integrál csak az atommag tartományára terjed ki, mivel az atommag ψ állapotfüggvényei ezen kívül nullák. De erre a régióra $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} \ll 1$, így kapjuk, hogy $\varphi_e \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right)$ és $\varphi_\nu \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right)$.
- Még ebből is csak az első tagot hagyjuk meg: $\varphi_e = \varphi_\nu \approx \frac{1}{\sqrt{V}}$

A mátrixelem tehát csak az atommag állapotaitól függ:

$$V_{i,f} = g \frac{1}{V} \int \psi_f^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r = g \frac{1}{V} M_{f,i}$$

Ebben a közelítésben a Fermi Arany szabály:

$$\lambda(E_f) = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{f,i}|^2 \frac{1}{V^2} \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$$

4

A végállapot-sűrűség kiszámítása:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

A legegyszerűbb feltételezések:

- 1) Minthogy a bomlás kinematikailag nem tökéletesen meghatározott (3 részecske a végállapotban), az elektron és az (anti)neutrínó véletlenszerűen „osztózik” a rendelkezésükre álló energián.
- 2) Minthogy az atommag sokkal nehezebb, mint az elektron és az antineutrínó, a visszalökődési energia elhanyagolható:
a bomlás teljes energiáját az elektron+neutrínó kapja meg.
- 3) Az atommag viszont impulzust átvehet, ezért $p + q \neq 0$

Mit jelent a „véletlenszerű osztozás”?

A közös fázistér minden mikroállapota azonos valószínűséggel töltődik be.

A fázistérben az elektron-állapotok száma (mivel az elektronok véletlenszerű irányba lépnek ki):

$$dn_e = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \cdot 4\pi \cdot p^2 \cdot dp$$

Hasonlóan, az (anti)neutrínó állapotok száma a fázistérben:

$$dn_\nu = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \cdot 4\pi \cdot q^2 \cdot dq$$

5

A végállapot energiája: $E_f = E_e + E_\nu$

ahol $E_e^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$ és $E_\nu^2 = (E_f - E_e)^2 = q^2 c^2$

Így kapjuk $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} (4\pi V)^2 \cdot \frac{1}{c^2} (E_e^2 - (mc^2)^2) \cdot \frac{1}{c^2} (E_f - E_e)^2 \cdot dp \cdot \left. \frac{dq}{dE_f} \right|_{E_e}$

Mivel $\left. \frac{dq}{dE_f} \right|_{E_e} = \frac{1}{c}$ (adott E_e mellett), $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = V^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^5} \cdot (E_e^2 - (mc^2)^2) \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot dp$
($E_f = E_0$, mivel az elektron+neutrínó a teljes bomlási energiát kapja)

Az E_e -t mérjük és nem p -t, így dp helyett dE_e -re van szükségünk

Mivel $pc = \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2}$, így kapjuk $dp = \frac{1}{c} \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2}} \cdot dE_e$

Visszahelyettesítve: $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = V^2 \left(\frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3 c^3} \right)^2 \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$

Mivel $\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{h} g^2 |M_{fi}|^2 \frac{1}{V^2} \cdot \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$

Végül: $\lambda(E_e) = g^2 \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} |M_{fi}|^2 \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$

6

Az elméleti és a kísérleti spektrumok összehasonlítása

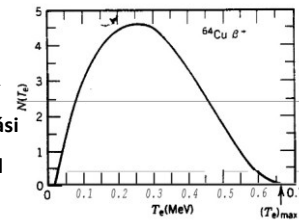
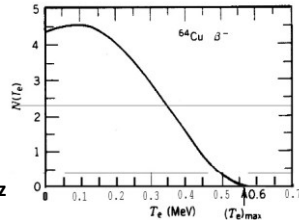
Vegyük észre, hogy a fenti levezetésben nem volt különbség a negatív és a pozitív β -bomlás között. A kísérletek szerint azonban van különbség!

A különbség oka a Coulomb-kölcsönhatás az elektron (pozitron) és az atommag között!

Megoldás: A Coulomb-kölcsönhatás figyelembevétele miatt fellép egy korrekciós faktor:

$$F(Z, E_e) \propto \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}}$$

Itt $\xi = \pm 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{\hbar v}$, és v az E_e mozgási energiájú részecske sebessége. A „+” jel az elektronra, a „-” jel a pozitronra vonatkozik.



R. D. Evans, The Atomic Nucleus (New York: McGraw-Hill, 1955)

7

A Fermi-Kurie plot

Végeredmény: $\lambda(E_e) = g^2 |M_{fi}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \cdot F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$

Kísérleti ellenőrzés:

Adott $(E_e, E_e + dE_e)$ energiatartományban detektált részecskék száma:

$N(E_e) \propto F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e$

Innen kapjuk:

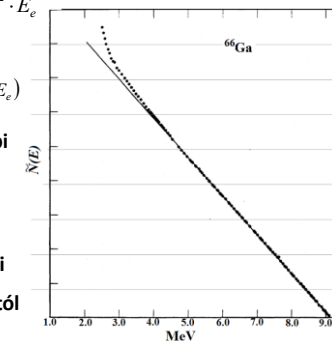
$$\tilde{N}(E_e) = \left(\frac{N(E_e)}{F(Z, E_e) \cdot E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \propto (E_0 - E_e)$$

A Fermi-Kurie plot lineáris, ha a korábbi közelítéseink érvényesek („megengedett átmenetek”).

„Tiltott átmenetekre” a Taylor-sort

$$\varphi_e \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right) \text{ tovább kell folytatni}$$

→ további függés a p impulzustól (és energiától).



D. C. Camp and L. M. Langer, Phys.Rev. 129, 1782 (1968)

A β -bomlás teljes bomlásállandója, a $\log(f)$ érték

A teljes bomlásállandó a parciálisnak az integrálja:

$$\lambda = \int_0^{E_0} \lambda(E_e) dE_e$$

$$\lambda = g^2 |M_{fi}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \int_0^{E_0} F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$$

A „Fermi integrál” definíciója (az értékei táblázatokban):

$$f(Z, E_0) = \frac{1}{(mc^2)^5} \int_0^{E_0} F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$$

$$\lambda = g^2 |M_{fi}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \cdot f(Z, E_0) \cdot (mc^2)^5$$

Figyelembe véve, hogy $\lambda = \frac{\ln 2}{t}$, (t a felezési idő!)

az $f(Z, E_0) \cdot t$ ($f \cdot t$ a továbbiakban)

$$f \cdot t = \ln 2 \cdot \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad \text{Ez már csak } M_{fi} \text{-től függ!}$$

Mivel t sok nagyságrenden át változhat, általában a $\log_{10}(f \cdot t)$ értéket használják (t -t másodpercben kell megadni!)

9

A gyenge kölcsönhatás „erőssége”

A legrövidebb felezési idejű β -bomlásokra $\log_{10}(f \cdot t) \approx 3 \dots 4$

Ezek az ún. „szuper-megengedett” bomlások. Ezek között a legérdekesebbek azok, ahol $0^+ \rightarrow 0^+$ átmenet történik.

(0^+ a kezdő és vég ψ_i és ψ_f atommagállapotok spinje és paritása).

Ezekre $M_{fi} = \sqrt{2}$ (elméletileg), atommagtól függetlenül!

A kísérletek ezt megerősítik! A mért érték: $f \cdot t = 3090 \pm 5$ [s]

Felhasználva $f \cdot t = \ln 2 \cdot \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m^5 c^4 |M_{fi}|^2}$, a g „csatolási” állandó:

$$g = 8,8 \cdot 10^{-5} [\text{MeV} \cdot \text{fm}^3]$$

A négy kölcsönhatás erősségének összehasonlítása

Fundamentális természeti állandókkal dimenziótlan mennyiségek.

Például a gyenge kölcsönhatásra: $G = g \frac{M_p c^2}{\hbar^3} \approx 10^{-5}$

Hasonló dimenziótlan mennyiségek	Erős kölcsönhatás:	~ 1
	Elektromágneses kölcsönhatás: (1/137)	$\sim 10^{-2}$
	Gyenge kölcsönhatás:	$\sim 10^{-5}$
	Gravitáció:	$\sim 10^{-39}$

10

Megmaradt problémák

- $H_\beta = ???$
 - neutrínó $\longleftrightarrow$ antineutrínó??
 - elektron $\longleftrightarrow$ pozitron??
- Relativisztikus kvantummechanika???

Megoldás

Relativisztikus kvantummechanikában az elektron állapotfüggvény egy spinor 4 komponenssel (leírja az elektront a pozitront és a két spin beállást)

$$\varphi_e = \begin{pmatrix} e_{\uparrow}^- \\ e_{\downarrow}^- \\ e_{\uparrow}^+ \\ e_{\downarrow}^+ \end{pmatrix}$$

Hasonlóan, a neutrínó állapotfüggvény is egy spinor 4 komponenssel (leírja a neutrínót és az antineutrínót és két spin beállást)

$$\varphi_\nu = \begin{pmatrix} \nu_{\uparrow} \\ \nu_{\downarrow} \\ \bar{\nu}_{\uparrow} \\ \bar{\nu}_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Emlékeztető: $V_{i,f} = g \int \psi_f^* \hat{O}_\beta \psi_i d^3r$

Ezért az integrálban lévő $\varphi_\nu^* \varphi_e$ szorzatnak 16 komponense lehet! (Bármely kombináció = 4^2)!

11

A H_β operátor különbözőképpen hathat ezekre a komponensekre

A H_β operátornak ugyancsak 16 komponense lehet!

Rendszerezük ezeket szimmetria-tulajdonságaik alapján!

A szuperpozíció elv alapján

16 komponens $\longleftrightarrow$ másik 16 komponens!

(...ismert szimmetria tulajdonságokkal)

Viselkedés	Komponens száma
Skalár	1
Pseudoskalár	1
Vektor	4
Axiál-vektor	4
Antiszimmetrikus tenzor	6

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{pmatrix}$$

12

Ezért a H_β operátor ugyancsak 5 tagból áll:

$$H_\beta = H_{\beta,s} + H_{\beta,p} + H_{\beta,v} + H_{\beta,A} + H_{\beta,T}$$

skalár ↑ vektor ↑ tenzor (anti-szimmetrikus)
 pszeudoskalár axiál vektor

- Pszeudoskalár NEM okozhat átmenetet ! (megmutatható)

Impulzusmomentum és kiválasztási szabályok

$$^A_Z X \rightarrow ^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}$$

$$\mathbf{J}_X = \mathbf{J}_Y + \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_\nu \quad \text{vektoregyenlet. Jelöljük}$$

$$s_e = 1/2, \text{ és } s_\nu = 1/2, \text{ így } j = \begin{cases} 1, & (j_z = -1, 0, 1) \\ 0, & (j_z = 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{matrix} \quad \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_\nu = \mathbf{j}$$

Megmutatható:

- skalár és vektor okoz: $j = 0$ (Fermi-átmenetek)
- axiál vektor és tenzor okoz: $j = 1$ (Gamow-Teller átmenetek)

Kiválasztási szabályok: $J_Y = J_X$ Fermi átmenetekre ($\Delta J = 0$)
 $J_Y = J_X \pm 1$, vagy $J_Y = J_X$ Gamow-Teller átmenetekre ($\Delta J = 0, \pm 1$)

13

Paritássértés béta-bomlásban

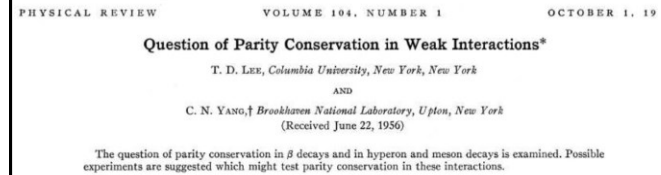
A paritást először Wigner Jenő vezette be 1927-ben, az atomi kvantumállapotok $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ transzformációs szimmetriájának leírására.

Az elektromágneses kölcsönhatásban a paritás megmarad

Az erős kölcsönhatásban is megmarad a paritás

Feltételezték, hogy a gyenge kölcsönhatásban is megmarad.

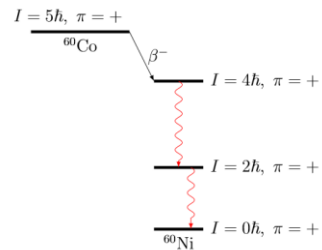
1956-ban azonban T.D.Lee és C.N.Yang megmutatta, hogy nincs direkt kísérleti bizonyíték arra, hogy a gyenge kölcsönhatásban is megmarad a paritás. → Nobel-díj 1957-ben!



14

Ha a gyenge kölcsönhatás nem őrzi meg a paritást, akkor ennek a β -bomlásban is látszani kell!

Kísérleti bizonyíték: C.S.Wu et al. (1957)



Polarizált ^{60}Co forrás:
 Alacsony hőmérséklet (~ 3 mK),
 erős mágneses mező

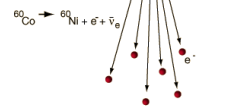
$$\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow} = e^{\frac{2\mu B}{kT}} \quad (\mu B) \gg kT$$



Eredmény:

Beta emission is preferentially in the direction opposite the nuclear spin, in violation of conservation of parity.

Wu, 1957



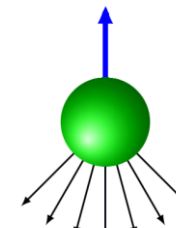
15

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/imgqua/wu.gif>

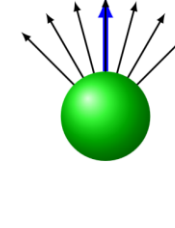
Miért jelent ez paritás sértést?

- Az elektronok iránya: $\mathbf{p}$ (impulzus) : vektor $\rightarrow -1$ tükrözve
- Az impulzus momentum iránya: $\mathbf{J} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$: axiálvektor $\rightarrow +1$ tükrözve

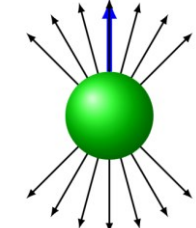
Impulzusmomentum Impulzusmomentum Impulzusmomentum



megfigyelt



tükrözött



Ha a paritás megmaradna

A koordináta-tengelyek tükrözése
 nem jó szimmetria!

16

Impulzusmomentum a Wu kísérletben

A paritásértés magyarázata (teljes paritásértés)

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} V_{\uparrow} \\ V_{\downarrow} \\ \tilde{V}_{\uparrow} \\ \tilde{V}_{\downarrow} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{\downarrow} \\ V_{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Csak jobb-kezes antineutrínók ($p \uparrow \uparrow s$), és balkezes neutrínók ($p \uparrow \downarrow s$) léteznek!

W. Pauli: „Nem tudom elhinni, hogy Isten balkezes!”

Antineutrínók a $J = 5\hbar$ irányába **kell** repüljenek!
Ezért az elektronok az ellenkező irányba ($\Sigma p \sim 0$)

Következmény a H_β operátorra:
 $H_\beta = \cancel{H_{\beta,s}} + H_{\beta,v} + (H_{\beta,A} + \cancel{H_{\beta,T}})$

Fermi, G.T.

Végül a kölcsönhatási operátor: $H_\beta = H_{\beta,v} + H_{\beta,A}$

17

A leptonok három „családja”

1936: C. D. Anderson: a **muon** (μ^-) ($m_\mu \sim 207 m_e$) felfedezése
(Nobel-díj: 1936 a pozitron felfedezéséért ☺)

1962: Lederman, Schwartz, Steinberger:
a **μ -neutrino** felfedezése (Nobel-díj: 1988)

1975: M. L. Perl (SLAC, USA):
a **tau meson** ($m_\tau \sim 3500 m_e$) felfedezése (Nobel-díj: 1995)

2000: DONUT kísérlet (Fermilab, USA)
a **tau neutrino** felfedezése

A leptonok családja („ízek” flavours)

Töltött lepton	Tömeg	Semleges lepton	Tömeg
elektron (e^-)	$1 m_e$	elektron neutrínó (ν_e)	?
müon (μ^-)	$\sim 200 m_e$	müon neutrínó (ν_μ)	?
tau mezon (τ^-)	$\sim 3500 m_e$	tau neutrínó (ν_τ)	?

... + az antirészecskéik!

18

Lepton töltés

A **neutrínómentes** kettős béta bomlás (és sok egyéb folyamat) vezettek el a **lepton töltés megmaradás** törvényének felfedezéséhez

Ugyanabban az évben (1953) 3 fizikus is felfedezte függetlenül:

Marx György : 1953 január (németül publikálta)

J. B. Zeldovich (szovjet) : 1953 július (oroszul publikálta)

H.M. Mahmoud és

E.J. Konopinsky (USA) : 1953 november (angolul publikálták)

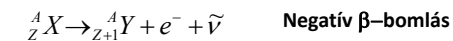
$$L = L_e + L_\mu + L_\tau$$

A lepton töltés „családokra” = +1 a részecskékre
-1 az antirészecskékre, és
0 a nem-leptonokra.

Megmaradási törvény érvényes a teljes lepton töltésre!
(Sok reakciónál még az egyes családokra külön is)

19

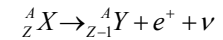
Néhány példa:



Negatív β -bomlás

$$0 \rightarrow 0 + 1 + (-1)$$

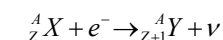
L_e



Pozitív β -bomlás

$$0 \rightarrow 0 + (-1) + 1$$

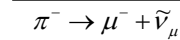
L_e



Elektron befogás

$$0 + 1 \rightarrow 0 + 1$$

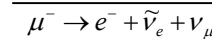
L_e



Pion bomlás

$$0 \rightarrow 1 + (-1)$$

L_μ



Müon bomlás

$$0 \rightarrow 1 + (-1)$$

L_e

$$1 \rightarrow 0 + 0 + 1$$

L_μ

20

R. Davis, J. Bahcall „Homestake” kísérlet (lásd: KisMagFiz)

Eredmények:

Várt érték $\sim 8,2 \pm 1,8$ SNU

Mért érték $\sim 2,65 \pm 0,23$ SNU

$$1 \text{ SNU} = 10^{-36} \frac{1}{^{37}\text{Cl} \cdot \text{s}}$$

Nap neutrínók rejtélye

Kísérletek a rejtély megoldására:

- Kísérleti hiba? NEM! Egyéb neutrínó kísérletek megerősítették az eredményt!

(Wikipedia: 47 kísérlet, „non-exhaustive list”)

- Hibás a Nap-modell? (pl. pulzál a Nap?)

- Egyéb... ? ☺



21

Neutrínó oszcilláció (Nobel-díj 2015)

Alapötlet: a neutrínóknak van tömege, **DE**

ν_e, ν_μ, ν_τ NEM tömeg-sajátértékek! (B. Pontecorvo 1957)

A gyenge kölcsönhatás az „íz” (e, μ , τ) szerint válogat

Keletkezés az ízek szerint $\rightarrow$ kevert tömegállapot

Terjedés $\rightarrow$ tömeg sajátállapotok szerint $\rightarrow$ íz-keveredés változik

Detektálás (Davis) $\rightarrow$ megint az ízek szerint

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} \\ U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ íz $\uparrow$ tömeg
 sajátállapotok sajátállapotok
 PMNS mátrix (1962)
 (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata)

22

Neutrínó oszcilláció (folyt.)

Egyszerűbb példa: 2 neutrínó

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
keveredési „szög”

A ν_e neutrínó keletkezik
 p impulzussal $t = 0$ -kor

$$\text{Mivel } E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_k^2 c^4}$$

$$t \text{ időpontban: } |\nu\rangle = \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) \cos \theta |\nu_1\rangle + \exp\left(\frac{-iE_2 t}{\hbar}\right) \sin \theta |\nu_2\rangle$$

$L \sim c \cdot t$ távolság megtétele után ismét ν_e -ként detektálás valószínűsége:

$$P\left(t \approx \frac{L}{c}\right) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1)L}{2\hbar c} \right] \quad (\text{lásd Függelék A})$$

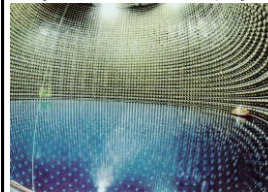
Megmutatható, hogy: $\frac{(E_2 - E_1)L}{2\hbar c} = 1,27 \frac{\Delta m^2 L}{pc}$, ahol $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ [eV²/c⁴]
 L [m], pc [MeV], (lásd Függelék B).

23

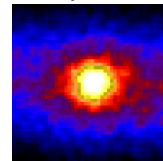
Neutrínó oszcilláció (folyt.)

Több kísérlet is megerősítette

Super Kamiokande (Japan)



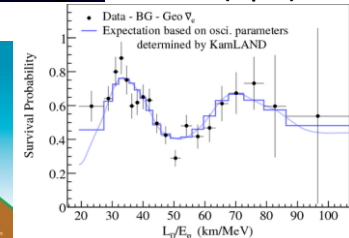
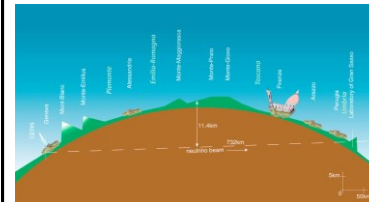
ν „fénykép”
a Napról



KamLAND (Japan)



CERN to Gran Sasso (Italy)



Függelék A (levezetés a neutrínó oszcillációhoz)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

t időpontban: $|\nu\rangle = \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) \cos\theta |\nu_1\rangle + \exp\left(\frac{-iE_2 t}{\hbar}\right) \sin\theta |\nu_2\rangle$

Annak valószínűsége, hogy ismét elektron-neutrínóként találjuk:

$$P(t) = |\langle \nu_e | \nu \rangle|^2 = \left| \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) \cos\theta \langle \nu_e | \nu_1 \rangle + \exp\left(\frac{-iE_2 t}{\hbar}\right) \sin\theta \langle \nu_e | \nu_2 \rangle \right|^2$$

Kihasználva, hogy $\langle \nu_e | \nu_1 \rangle = \cos\theta$ **és** $\langle \nu_e | \nu_2 \rangle = \sin\theta$

$$P(t) = \left| \exp\left(\frac{-iE_1 t}{\hbar}\right) \cos^2\theta + \exp\left(\frac{-iE_2 t}{\hbar}\right) \sin^2\theta \right|^2$$

Bontsuk fel az exp függvényeket is valós és képzetes részekre:

$$P(t) = \left| \cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \cos\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta - i \left(\sin\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \sin\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta \right) \right|^2$$

25

$$P(t) = \left| \cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \cos\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta - i \left(\sin\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \sin\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta \right) \right|^2$$

$$P(t) = \left(\cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \cos\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta \right)^2 + \left(\sin\frac{E_1 t}{\hbar} \cos^2\theta + \sin\frac{E_2 t}{\hbar} \sin^2\theta \right)^2$$

A négyzetre emeléseket elvégezve:

$$P(t) = \cos^4\theta \left(\cos^2\frac{E_1 t}{\hbar} + \sin^2\frac{E_1 t}{\hbar} \right) + \sin^4\theta \left(\cos^2\frac{E_2 t}{\hbar} + \sin^2\frac{E_2 t}{\hbar} \right) + 2\cos^2\theta \sin^2\theta \left(\cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos\frac{E_2 t}{\hbar} + \sin\frac{E_1 t}{\hbar} \sin\frac{E_2 t}{\hbar} \right) = 1$$

Használjuk ki a következő trigonometriai azonosságokat:

$$2\cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2}(4\sin^2\theta \cos^2\theta) = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta, \text{ valamint}$$

$$\cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos\frac{E_2 t}{\hbar} + \sin\frac{E_1 t}{\hbar} \sin\frac{E_2 t}{\hbar} = \cos\frac{(E_2 - E_1) \cdot t}{\hbar}, \text{ továbbá}$$

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

26

$$P(t) = \cos^4\theta \left(\cos^2\frac{E_1 t}{\hbar} + \sin^2\frac{E_1 t}{\hbar} \right) + \sin^4\theta \left(\cos^2\frac{E_2 t}{\hbar} + \sin^2\frac{E_2 t}{\hbar} \right) +$$

$$+ 2\cos^2\theta \sin^2\theta \left(\cos\frac{E_1 t}{\hbar} \cos\frac{E_2 t}{\hbar} + \sin\frac{E_1 t}{\hbar} \sin\frac{E_2 t}{\hbar} \right) \longrightarrow$$

$$P(t) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \cdot \cos\frac{(E_2 - E_1) \cdot t}{\hbar} = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos\frac{(E_2 - E_1) \cdot t}{\hbar} \right)$$

Végül kihasználva, hogy $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \sin^2 \alpha$ **kapjuk:**

$$P(t) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1) \cdot t}{2\hbar} \right]$$

Ebből pedig azonnal következik, hogy

$$P\left(t \approx \frac{L}{c}\right) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1) \cdot L}{2\hbar c} \right]$$

Ezt kellett megmutatni. (Q.E.D)

27

Függelék B (levezetés neutrínó oszcillációhoz)

Mutassuk meg, hogy $\frac{(E_2 - E_1)L}{2\hbar c} = 1,27 \frac{\Delta m^2 L}{pc}$, **ahol** $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ [eV²/c⁴] **L [m], pc [MeV].**

Először határozzuk meg $E_2 - E_1$ **értékét!**

Mivel $E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_k^2 c^4}$ **és** $pc \gg m_k c^2$

$$E_k = pc \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{m_k c^2}{pc} \right)^2} \approx pc \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_k c^2}{pc} \right)^2 \right)$$

Ezért

$$E_2 - E_1 \approx \frac{pc}{2} \left[\left(\frac{m_2 c^2}{pc} \right)^2 - \left(\frac{m_1 c^2}{pc} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_2^2 - m_1^2) \cdot c^4}{pc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m^2 \cdot c^4}{pc}$$

Így kapjuk $\frac{(E_2 - E_1) \cdot L}{2\hbar c} \approx \left(\frac{1}{4\hbar c} \right) \cdot \frac{(\Delta m^2 \cdot c^4) \cdot L}{pc}$

A megfelelő egységekben behelyettesítve a bizonyítandó állítást kapjuk.

28