

Béta bomlás és a neutrínó I.

Tartalom

- A béta bomlás alapjai
- Energiaviszonyok béta bomlásokkor
- A béta-bomlás Fermi féle elmélete
- Fermi és Gamow-Teller átmenetek

1

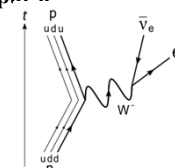
A béta-bomlás alapjai

Három téma:

- A béta-bomlás energetikai viszonyainak tisztázása
- A kibocsátott elektron (pozitron) energiaspektruma (átmeneti valószínűség az elektron energiájának a függvényében)
- Az integrális átmeneti valószínűség (bomlás bármely energiával)

Kiindulópont:

A kvantummechanika alapján elektron nem lehet kötve az atommagban → az elektron-antineutrínó pár a kölcsönhatás pillanatában **keletkezik!**



Megjegyzés:

Részecskefizikában a mellékelt kép alapján írjuk le a béta-bomlást, de itt mi klasszikus magfizikai leírást adunk!

$M(W^\pm) = 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV}/c^2 \rightarrow$ **nagyon rövid hatótávolság**

Energiaviszonyok:

Negatív β-bomlás: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}$

$$M(X_{nucl}) \cdot c^2 = M(Y_{nucl}) \cdot c^2 + m(e^-) \cdot c^2 + m(\bar{\nu}) \cdot c^2 + Q$$

$$\underbrace{[M(X_{nucl}) + Z \cdot m(e^-)] \cdot c^2}_{M(X_{atom}) \cdot c^2} = \underbrace{[M(Y_{nucl}) + Z \cdot m(e^-)] \cdot c^2 + m(e^-) \cdot c^2 + 0 + Q}_{M(Y_{atom}) \cdot c^2}$$

A reakcióenergiára kapjuk: $Q = [M(X_{atom}) - M(Y_{atom})] \cdot c^2$

Pozitív β-bomlás: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu$

$$M(X_{nucl}) \cdot c^2 = M(Y_{nucl}) \cdot c^2 + m(e^+) \cdot c^2 + m(\nu) \cdot c^2 + Q$$

$$\underbrace{[M(X_{nucl}) + Z \cdot m(e^-)] \cdot c^2}_{M(X_{atom}) \cdot c^2} = \underbrace{[M(Y_{nucl}) + Z \cdot m(e^-)] \cdot c^2 + m(e^+) \cdot c^2 + 0 + Q}_{M(Y_{atom}) \cdot c^2 + m(e^+) \cdot c^2}$$

A reakcióenergia: $Q = [M(X_{atom}) - M(Y_{atom}) - 2 \cdot m(e^\pm)] \cdot c^2$

Pozitív β-bomlás csak akkor van, ha

$$[M(X_{atom}) - M(Y_{atom})] \cdot c^2 > 2 \cdot m(e^\pm) \cdot c^2 = 1022 \text{ keV}$$

3

Elektron befogás (EC): ${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu$

$$M(X_{nucl}) \cdot c^2 + m(e^-) \cdot c^2 = M(Y_{nucl}) \cdot c^2 + m(\nu) \cdot c^2 + Q$$

$$\underbrace{[M(X_{nucl}) + Z \cdot m(e^-)] \cdot c^2}_{M(X_{atom}) \cdot c^2} + m(e^-) \cdot c^2 = \underbrace{[M(Y_{nucl}) + (Z-1) \cdot m(e^-)] \cdot c^2 + 0 + Q}_{M(Y_{atom}) \cdot c^2 + m(e^-) \cdot c^2}$$

Az elektrontömegek kiesnek, így a reakcióenergiára kapjuk:

$$Q = [M(X_{atom}) - M(Y_{atom})] \cdot c^2$$

Energia-feltételek (atomtömegek!) összefoglalva:

Negatív β-bomlás: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu} \rightarrow M(X) - M(Y) > 0$

Pozitív β-bomlás: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu \rightarrow M(X) - M(Y) > 2m(e)$

Elektron befogás: ${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu \rightarrow M(X) - M(Y) > 0$

4

A kibocsátott elektronok energiaspektruma

Kiinduló pont:

Fermi „Arany szabály”:

$$\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{i,f}|^2 \rho(E_f) \rho(E_e)$$

Parciális bomlásállandó Kölcsönhatási mátrixelem sűrűség: $\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$

Mindkét faktor függhet a kibocsátott részecskék energiájától
 → a spektrum alakjára befolyással vannak

A mátrixelem kiszámítása

$$V_{i,f} = g \int \Psi_f^* \hat{H}_\beta \Psi_i d^3r$$

(\hat{H}_β a kölcsönhatási operátor, g a kölcsönhatás „erőssége”)

A kezdeti állapotban csak atommag van: $\Psi_i = \psi_i$

Végállapotban: atommag + elektron + (anti)neutrínó: $\Psi_f = \psi_f^* \varphi_e^* \varphi_\nu^*$

Így a mátrixelem: $V_{i,f} = g \int \psi_f^* \varphi_e^* \varphi_\nu^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r$

5

Első közelítésben: $\varphi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}$ és $\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}$ (síkhullámok)

\mathbf{p} az elektron impulzusa, és \mathbf{q} a neutrínóé.

V a normalizációs térfogat.

További közelítések:

- Az integrál csak az atommag tartományára terjed ki, mivel az atommag ψ állapotfüggvényei ezen kívül nullák. Erre a régióra $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} \ll 1$, így kapjuk, hogy $\varphi_e \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots\right)$ és $\varphi_\nu \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \left(1 + i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots\right)$.
- Még ebből is csak az első tagot hagyjuk meg: $\varphi_e \approx \varphi_\nu \approx \frac{1}{\sqrt{V}}$

A mátrixelem tehát csak az atommag állapotaitól függ:

$$V_{i,f} = g \frac{1}{V} \int \psi_f^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r = g \frac{1}{V} M_{f,i}$$

Ebben a közelítésben a Fermi Arany szabály:

$$\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{f,i}|^2 \frac{1}{V^2} \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$$

6

A végállapot-sűrűség kiszámítása:

A legegyszerűbb feltételezések:

$$\rho(E_f) = \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$$

1) Minthogy a bomlás kinematikailag nem tökéletesen meghatározott (3 részecske a végállapotban), az elektron és az (anti)neutrínó véletlenszerűen „osztózik” a rendelkezésükre álló energián.

2) Minthogy az atommag sokkal nehezebb, mint az elektron és az antineutrínó, a visszalökődési energia elhanyagolható: a bomlás teljes energiáját az elektron+neutrínó kapja meg.

1) Mit jelent a „véletlenszerű osztás”?

A közös fázistér minden mikroállapota azonos valószínűséggel töltődik be.

A fázistérben az elektron-állapotok száma (mivel az elektronok véletlenszerű irányba lépnek ki):

$$dn_e = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \cdot 4\pi \cdot p^2 \cdot dp$$

Hasonlóan, az (anti)neutrínó állapotok száma a fázistérben:

$$dn_\nu = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \cdot 4\pi \cdot q^2 \cdot dq$$

7

A végállapot energiája: $E_f = E_e + E_\nu$

ahol $E_e^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$ és $E_\nu^2 = (E_f - E_e)^2 = q^2 c^2$

Így kapjuk $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} (4\pi V)^2 \cdot \frac{1}{c^2} (E_e^2 - (m_0 c^2)^2) \cdot \frac{1}{c^2} (E_f - E_e) \cdot dp \cdot \left. \frac{dq}{dE_f} \right|_{E_e}$

Mivel $\left. \frac{dq}{dE_f} \right|_{E_e} = \frac{1}{c}$ (adott E_e mellett) $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = V^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^5} (E_e^2 - (m_0 c^2)^2) \cdot (E_f - E_e) \cdot dp$ ($E_f = E_0$, mivel az elektron+neutrínó a teljes bomlási energiát kapja)

Az E_e -t mérjük és nem p -t, így dp helyett dE_e -re van szükségünk

Mivel $pc = \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2}$, így kapjuk $dp = \frac{1}{c} \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2}} \cdot dE_e$

Visszahelyettesítve: $\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = V^2 \left(\frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3 c^3} \right)^2 \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e) \cdot E_e \cdot dE_e$

Mivel $\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{f,i}|^2 \frac{1}{V^2} \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e}$

Végül: $\lambda(E_e) = g^2 \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} |M_{f,i}|^2 \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e) \cdot E_e \cdot dE_e$

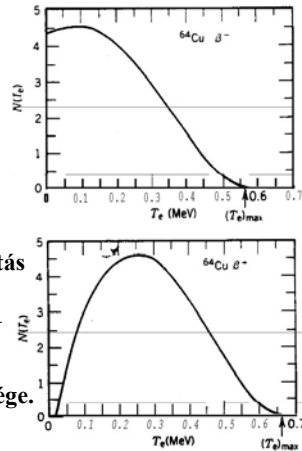
8

Az elméleti és a kísérleti spektrumok összehasonlítása

Vegyük észre, hogy a fenti levezetésben nem volt különbség a negatív és a pozitív β -bomlás között. A kísérletek szerint azonban van különbség!

A különbség oka a Coulomb-kölcsönhatás az elektron (pozitron) és az atommag között!

Megoldás: A Coulomb-kölcsönhatás figyelembevétele miatt fellép egy korrekciós faktor: $F(Z, E_e) \propto \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}}$
Itt $\xi = \pm 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\hbar v}$, és v az E_e mozgási energiájú részecske sebessége.
A „+” jel az elektronra, a „-” jel a pozitronra vonatkozik.



R. D. Evans, The Atomic Nucleus (New York: McGraw-Hill, 1955)

9

A Fermi-Kurie plot

Végeredmény: $\lambda(E_e) = g^2 |M_{f,i}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \cdot F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$

Kísérleti ellenőrzés:

Adott $(E_e, E_e + dE_e)$ energiatarományban detektált részecskék száma:

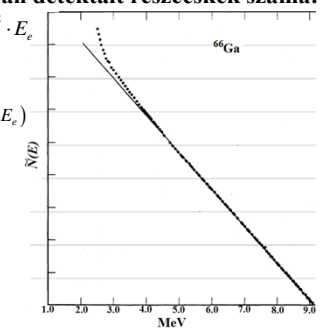
$$N(E_e) \propto F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e$$

Innen kapjuk:

$$\tilde{N}(E_e) = \left(\frac{N(E_e)}{F(Z, E_e) \cdot E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2}} \right)^{1/2} \propto (E_0 - E_e)$$

A Fermi-Kurie plot lineáris, ha a korábbi közelítéseink érvényesek („megengedett átmenetek”).

„Tiltott átmenetekre” a Taylor-sort $\phi_e \approx \frac{1}{\sqrt{V}} (1 + i \frac{p \cdot r}{\hbar} + \dots)$ tovább kell folytatni \rightarrow további függés a p impulzustól (és energiától).



D. C. Camp and L. M. Langer, Phys. Rev. 129, 1782 (1963)

10

A β -bomlás teljes bomlásállandója, a $\log(ft)$ érték

A teljes bomlásállandó a parciálisnak az integrálja: $\lambda = \int_0^{E_0} \lambda(E_e) dE_e$
 $\lambda = g^2 |M_{f,i}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \cdot \int_0^{E_0} F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$

A „Fermi integrál” definíciója (az értékei táblázatokban):

$$f(Z, E_0) = \frac{1}{(m_0 c^2)^5} \int_0^{E_0} F(Z, E_e) \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_0 c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \cdot E_e \cdot dE_e$$

$$\text{Ezzel: } \lambda = g^2 |M_{f,i}|^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \cdot f(Z, E_0) \cdot (m_0 c^2)^5$$

Figyelembe véve, hogy $\lambda = \frac{\ln 2}{t}$, az $f(Z, E_0) \cdot t$ (ft a továbbiakban)

$$f \cdot t = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m^5 c^4 |M_{f,i}|^2} \quad \text{Ez már csak } M_{f,i} \text{-től függ!}$$

Mivel t sok nagyságrenden át változhat, általában a $\log_{10}(f \cdot t)$ értéket használják (t -t másodpercben kell megadni!)

11

A gyenge kölcsönhatás „erőssége”

A legrövidebb felezési idejű β -bomlásokra $\log_{10}(f \cdot t) \approx 3 \dots 4$

Ezek az ún. „szuper-megengedett” bomlások. Ezek között a legérdekesebbek, ahol $0^+ \rightarrow 0^+$ átmenet történik.

Ezekre $M_{f,i} = \sqrt{2}$ (elméletileg), atommagtól függetlenül!

A kísérletek ezt megerősítik! A mért érték: $f \cdot t = 3090 \pm 5$ [s]

Felhasználva $f \cdot t = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m^5 c^4 |M_{f,i}|^2}$, a g csatolási állandó:

$$g = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ [MeV} \cdot \text{fm}^3 \text{]}$$

A négy kölcsönhatás erősségének összehasonlítása

Fundamentális természeti állandókkal dimenziótlan mennyiségek.

Például a gyenge kölcsönhatásra: $G = g \frac{M_p c^2}{\hbar^3} \approx 10^{-5}$

Hasonló dimenziótlan mennyiségek	}	Erős kölcsönhatás:	~ 1
		Elektromágneses kölcsönhatás: $\alpha \approx \frac{1}{137}$	$\sim 10^{-2}$
		Gyenge kölcsönhatás:	$\sim 10^{-5}$
		Gravitáció:	$\sim 10^{-39}$

12

Megmaradt problémák

- $H_\beta = ???$
 - neutrínó \longleftrightarrow antineutrínó??
 - elektron \longleftrightarrow pozitron??
- Relativisztikus kvantum mechanika???

$$\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{i,f}|^2 \rho(E_f)_{E_e}$$

$$V_{i,f} = g \int \psi_f^* \phi_e^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r$$

Megoldás

Relativisztikus kvantummechanikában az elektron állapotfüggvénye egy 4 komponensű spinor (leírja az e^- , e^+ és a két spin beállást)

$$\varphi_e = \begin{pmatrix} e_\uparrow^- \\ e_\downarrow^- \\ e_\uparrow^+ \\ e_\downarrow^+ \end{pmatrix}$$

Hasonlóan, a neutrínó állapotfüggvénye is egy spinor 4 komponenssel (leírja a neutrínót és az antineutrínót és a két spin beállást)

$$\varphi_\nu = \begin{pmatrix} \nu_\uparrow \\ \nu_\downarrow \\ \bar{\nu}_\uparrow \\ \bar{\nu}_\downarrow \end{pmatrix}$$

$$V_{i,f} = g \int \psi_f^* \phi_e^* \hat{H}_\beta \psi_i d^3r$$

Ezért az integrálban lévő $\phi_e^* \phi_e$ szorzatnak matematikailag 16 komponense lehet! (Bármely kombináció = 4^2)!

13

A H_β operátor különbözőképpen hathat ezekre a komponensekre



A H_β operátornak ugyancsak 16 komponense lehet!
Rendszerezük ezeket szimmetria-tulajdonságaik alapján!

A szuperpozíció elv alapján

16 komponens \longleftrightarrow másik 16 komponens!
(...ismert szimmetria tulajdonságokkal)

Transzformációs viselkedés (relativisztikus, 4 dimenzió)	Komponensek száma
Skalár	1
Pseudoskalár	1
Vektor	4
Axiál-vektor	4
Antiszimmetrikus tenzor	6

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{pmatrix}$$

14

Ezért a H_β operátor ugyancsak 5 tagból áll:

$$H_\beta = H_{\beta,S} + H_{\beta,P} + H_{\beta,V} + H_{\beta,A} + H_{\beta,T}$$

skalár vektor tenzor (anti-szimmetrikus)
pseudoskalár axiál vektor

- Pseudoskalár NEM okozhat átmenetet! (megmutatható)

Impulzummomentum és kiválasztási szabályok

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}$$

$$\mathbf{J}_X = \mathbf{J}_Y + \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_\nu \quad \text{vektoregyenlet. Jelöljük } \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_\nu = \mathbf{j}$$

$$s_e = 1/2, \text{ és } s_\nu = 1/2, \text{ így } j = \begin{cases} 1, & (j_z = -1, 0, 1) \\ 0, & (j_z = 0) \end{cases}$$

Megmutatható:

- skalár és vektor okoz: $j = 0$ (Fermi-átmenetek)
- axiál vektor és tenzor okoz: $j = 1$ (Gamow-Teller átmenetek)

Kiválasztási szabályok: $J_Y = J_X$ Fermi átmenetekre ($\Delta J = 0$)

$J_Y = J_X \pm 1$, vagy $J_Y = J_X$ Gamow-Teller átmenetekre ($\Delta J = 0, \pm 1$)

15