Radioaktív bomlási sor szimulációja

A radioaktív bomlásra képes atomok „nem öregszenek”, azaz nem lehet sem azt megmondani, hogy egy kiszemelt atom mennyi idős (azaz mikor keletkezett), sem azt, hogy pontosan mennyi idő múlva fog elbomlani. Csak valószínűségi kijelentést lehet tenni – hasonlóan például a lottó nyereményekhez – a bomlásukra vonatkozóan. Az, hogy minden időpillanat azonos a számukra (nem „öregszenek”) azt jelenti, hogy minden kis időegység alatt ugyanakkora a valószínűsége annak, hogy elbomlanak. Röviden: az időegységre eső bomlási valószínűségük időtől független, állandó. Ezt **bomlásállandó**nak szokás nevezni, és λ-val jelöljük. Mivel ez „időegységre eső” valószínűség, ezért mértékegysége: [1/s].

A definícióból következik, hogy egy kiszemelt atom elbomlásának valószínűsége Δt idő alatt: $\lambda \cdot \Delta t$.

Legyen egy adott időpillanatban $N(t)$ radioaktív atom a kiszemelt mintában (N igen nagy szám). Ekkor azt várjuk, hogy Δt idő alatt ebből $N(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$ atom fog elbomlani, azaz ennyivel fog csökkenni a kiszemelt mintában lévő radioaktív atomok száma.

Matematikailag: $\Delta N = -N(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$.

Ezt az egyenletet átírhatjuk: $\frac{\Delta N}{N(t)} = -\lambda \cdot \Delta t$. (1)

Ebből az egyenletből könnyen megkaphatjuk az ún. exponenciális bomlástörvényt, ha végrehajtjuk a $\Delta t \to 0$ határátmenetet, és utána az egyenlet mindkét oldalát kiintegráljuk $\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN'}{N'} = -\lambda \cdot \int_0^t dt'$. Az integrálás elvégzése után kapjuk:

$\ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda \cdot (t-0)$.

Másképpen: $\ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda \cdot t$, amiből kapjuk: $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$. (2)

Ez az **exponenciális bomlástörvény**.

> ***Megjegyzés:*** *Ez csak a radioaktív atommagok számának a várható értékét adja meg az idő függvényében! Ettől kisebb-nagyobb eltérések vannak a tényleges esetekben, hiszen – ahogy mondtuk – a bomlást statisztikus törvények szabályozzák. Az is nyilvánvaló a (1) egyenletből, hogy ha $\Delta t \to 0$, akkor természetesen $\frac{\Delta N}{N(t)} \to 0$ is igaz kell legyen. Mivel azonban ΔN csak egész szám lehet (hiszen „tized atom” nem létezik), ezért ez a határátmenet csak igen nagy $N(t)$ esetén hajtható végre! A gyakorlati életben használatos radioaktív anyagokra általában teljesül a $\frac{\Delta N}{N(t)} \to 0$ feltétel, $N(t)$ nagy értéke miatt.*

A szimulációban (2482 db) radioaktív „atommag” bomlását szimuláljuk. A kezdeti atommagok **piros** színűek, a bomlástermékek pedig **kékek**. A szimuláció **NEM az exponenciális bomlástörvény alapján** számítja ki a következő időpontban (1 s múlva) még meglévő atommagok számát, hanem minden egyes atommagra számítógéppel generált véletlen számokkal „kisorsolja”, hogy a következő másodpercben elbomlik-e, vagy megmarad.

Az exponenciális bomlástörvény – mint várható érték – szépen „kiadódik” (figyeljük egyelőre csak a **piros** színű atomok számát, és az azt ábrázoló görbét). Az ettől való statisztikus eltérések jól megfigyelhetők elegendően hosszú idő után, amikor a meglévő részecskék száma már eléggé alacsony lesz.

Felezési idő

Felezési időnek azt az időtartamot nevezzük, amely idő alatt egy minta radioaktív atomjainak a fele várhatóan elbomlik. Mivel a radioaktív bomlás statisztikus folyamat, ezért ez is csak várható értékként értelmezhető. Egy konkrét minta radioaktív atomjainak fele általában körülbelül a felezési idő alatt bomlik el, ám attól egy-egy konkrét esetben kisebb-nagyobb eltérések is lehetnek. Nagyszámú atom esetén azonban ez a statisztikus szórás az atomok számához képest elhanyagolható lesz, és a tényleges felezési idő egyre jobban megközelíti a várható értéket.

A (2) képletből a T felezési idő megkapható, hiszen a definíció szerint $N(T)=\frac{N_0}{2}$. Ezt behelyettesítve kapjuk: $\frac{N_0}{2}=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot T}$, amiből egyszerűsítés és azonos átalakítások után adódik: $\boxed{T=\frac{\ln 2}{\lambda}}\approx\frac{0{,}7}{\lambda}$.

Javaslat: a szimulációban ezt is egyszerűen „ellenőrizhetjük”: állítsunk be például λ = 0.01 másodpercenkénti bomlási valószínűséget, és figyeljük azt az időt, amikor a kezdeti (**piros**) radioaktív atomok száma megfeleződik (kb. 1241 lesz). Nagyjából 70 s körüli értékeket kapunk.

Aktivitás

Egy adott radioaktív mintában az időegység alatt elbomlott atomok számát a minta aktivitásának nevezzük. Az aktivitás egysége a Becquerel (ejtsd: bekerel. Henri Becquerel francia fizikusról, a radioaktivitás felfedezőjéről elnevezve).

1 Bq = 1 bomlás/s.

Az 1 Bq igen kis egység, ennek a többszöröseit használjuk a gyakorlatban: 1 kBq = 1000 Bq, 1 MBq = 10^6 Bq, 1 GBq = 10^9 Bq. stb.

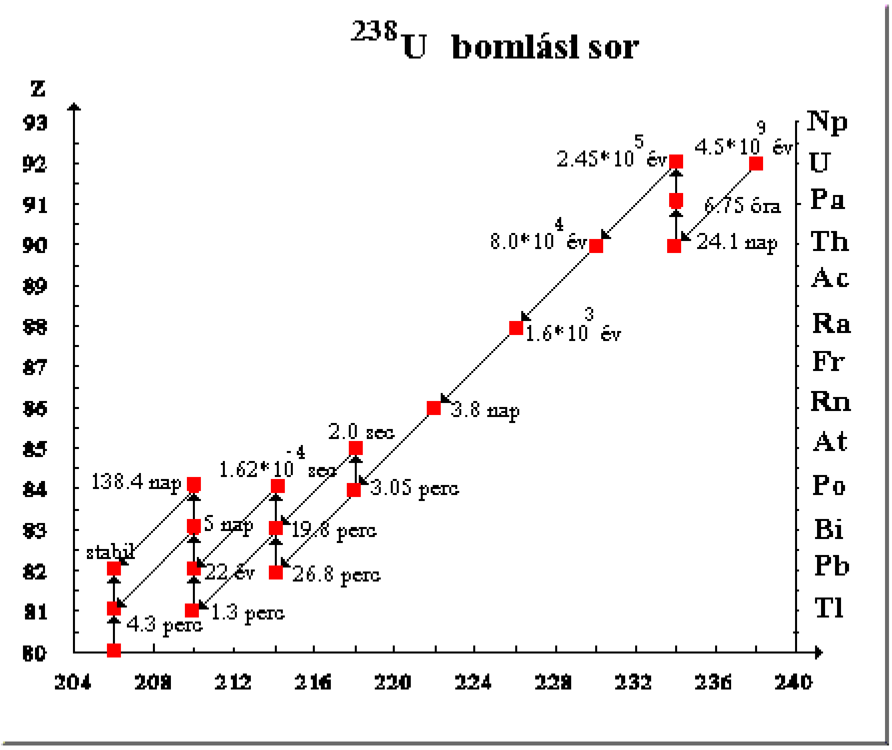
Az aktivitást az exponenciális bomlástörvény alapján is kifejezhetjük, hiszen a definícióból következik, hogy az aktivitás $a(t) = -\frac{dN}{dt}$. Ismerve viszont *N(t)* alakját, egyszerű deriválással kapjuk, hogy

$$\boxed{a(t) = \lambda \cdot N(t) = \frac{\ln 2}{T} N(t)}. \qquad (3)$$

Ez fontos összefüggés, mivel egyszerű kapcsolatot teremt az aktivitás, a felezési idő (vagy a bomlásállandó) és a radioaktív atommagok száma között. Bármely kettő ismeretében a harmadik egyszerűen meghatározható.

Bomlási sor

A természetben gyakran előfordul, hogy egy radioaktív anyag olyan elemre bomlik, amely maga is radioaktív. Így a „leányelem” tovább bomlik, majd annak a leánya még tovább, és így tovább, míg a sor végén el nem érünk egy olyan elemet, amely már stabil, nem bomlik tovább.
A radioaktív elemek ilyen sorozatát **radioaktív bomlási sor**nak nevezzük.
Például az ^{238}U bomlási sorában 19 különböző izotóp van, amíg a sor végül a ^{206}Pb stabil izotópon végződik (ld. ábra).



A szimuláció olyan – 5 tagból álló – bomlási sor időbeli fejlődését mutatja be, ahol az ötödik tag a stabil elem (bomlási állandója nulla), az első négy elem bomlási állandóját pedig megválaszthatjuk. A szimuláció t = 0 időpillanatban olyan állapotból indul, amikor az első elemből 2482 atom van. A bomlási sor 5 elemét különböző színű körök jelzik: **piros** =>**kék**=>**zöld**=>**barna**=>**lila**.

Elméleti leírás

Az egyszerűség kedvéért itt most csak egy 3 elemből (két radioaktív, és egy stabil) bomlási sorral foglalkozunk. Jelölje rendre $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ az egyes atommagok számát t időpillanatban, λ_1, λ_2 pedig a két első – radioaktív – elem bomlási állandóját. Az egyes atommagok számának változását a következő differenciálegyenlet – rendszer írja le:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1(t)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 \cdot N_2(t) + \lambda_1 \cdot N_1(t) \qquad (4)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = +\lambda_2 \cdot N_2(t)$$

Az első egyenlet ismerős: azt írja le, hogy az „1” típusú anyag bomlik, λ_1 bomlási állandóval. Ennek a megoldását rögtön fel is tudjuk írni (láttuk korábban): $N_1(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t}$. Itt N_0 az „1” anyag atommagjainak a kezdeti száma.

A második egyenlet valamivel bonyolultabb. Az egyenlet jobboldalán az első tag továbbra is ismerős: azt írja le, hogy a „2” anyag is radioaktív, és λ_2 bomlási állandóval bomlik. A jobb oldalon lévő második tag viszont arról ad számot, hogy a „2” anyag nemcsak bomlik, hanem **keletkezik** is, mégpedig az „1” anyagból. Azaz, időegység alatt ugyanannyi keletkezik a „2” anyagból, mint amennyi az „1” anyagból elbomlik!

Ez után a harmadik egyenlet már magától értetődő. A „3” anyag nem bomlik (ott tehát hiányzik az egyenlet jobb oldaláról a negatív előjelű tag), csak keletkezik: mégpedig a „2” anyagból.

Miután $N_1(t)$-t az első egyenlet megoldásából már ismerjük, ezt behelyettesíthetjük a második egyenletbe, és kapjuk a következőt:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 \cdot N_2(t) + \lambda_1 \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t}.$$

Mivel N_0 egy konstans, így ebben az egyenletben csak $N_2(t)$ az egyetlen ismeretlen függvény, ezért ez egy elsőrendű, inhomogén differenciál-egyenlet. Ezt a matematikában tanult módszerek valamelyikével megoldhatjuk. Az $N_2(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$N_2(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot t}\right).$$

Azonos átalakítással kapjuk:

$$\boxed{N_2(t) = N_1(t) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot t}\right)} \qquad (5)$$

Megjegyzés*: Ez a megoldás természetesen csak akkor igaz, amikor $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Ha $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, akkor a megoldás: $N_2(t) = \lambda \cdot t \cdot N_1(t)$.*

Részleges radioaktív egyensúly

A (5) egyenlet egyik speciális esete, ha $\lambda_2 > \lambda_1$, azaz a leányelem gyorsabban bomlik, mint a kiindulási izotóp. Ekkor az egyenlet jobb oldalán lévő exponenciális kitevője negatív, és így elegendően hosszú idő után az exponenciális elhanyagolhatóan kicsivé válik az egyhez képest. Ekkor kapjuk: $\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{konstans.}$ (6)

Más szóval, a bomlási sorban lévő elemek atomszámainak (koncentrációinak) aránya az időtől független konstans lesz. Ezt **részleges radioaktív egyensúly**nak nevezzük.

Javaslat: A részleges radioaktív egyensúlyt a szimuláció segítségével úgy figyelhetjük meg a legegyszerűbben, hogy $\lambda_2 = 2\lambda_1$ bomlási állandót választunk (pl. $\lambda_1 = 0.07$ és $\lambda_2 = 0.14$). A fenti képlet alapján ekkor azt várjuk, hogy az egyensúly beállta után $N_2(t) = N_1(t)$ lesz. Megfelelő idő elteltével a **piros** és a **kék** görbék valóban „együtt futnak” majd – a statisztikus ingadozásoktól eltekintve (a többi görbével itt ne törődjünk).

A részleges radioaktív egyensúlyt az **aktivitások** segítségével is megfogalmazhatjuk, emlékezve arra, hogy $a(t) = \lambda \cdot N(t)$. A fenti arányt átírhatjuk: $\frac{\lambda_2 \cdot N_2(t)}{\lambda_1 \cdot N_1(t)} \equiv \frac{a_2(t)}{a_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{konstans.}$

(Vegyük észre, hogy a jobboldalon lévő tört számlálója most más, mint az (6) egyenletben!!)

Szekuláris radioaktív egyensúly

Az (5) egyenlet még speciálisabb esete, ha $\lambda_2 >> \lambda_1$. Ekkor természetesen fennáll a részleges egyensúly esete is, tehát az előző pontban levezetett (6) képlet alkalmazható. További egyszerűsítést jelent azonban az, hogy a nevezőben λ_2 mellett elhanyagolhatóvá válik λ_1, és így kapjuk:

$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Ezt kicsit átalakítva: $\lambda_1 \cdot N_1(t) = \lambda_2 \cdot N_2(t)$. Emlékezve az aktivitás fogalmára kapjuk: $a_1(t) = a_2(t)$ .Ezt **szekuláris egyensúlynak** nevezzük.

Könnyű belátni, hogy egy több elemű bomlási sorra is igaz lesz ez, ha a sor első elemének a bomlási állandója sokkal kisebb, mint a sorban lévő összes többi izotópé.

Szekuláris egyensúlyban tehát a bomlási sor minden tagjának azonos az aktivitása!

$$\boxed{a_1(t) = a_2(t) = \ldots = a_k(t)} \quad (7)$$

Javaslat: a szimuláció lehetővé teszi a szekuláris egyensúly megfigyelését is. Válasszuk a kiindulási bomlásállandót jóval kisebbnek, mint a többit (pl. 0.002-nek az elsőt, a többiekét pedig 0.1-nek). Elegendően hosszú idő után szépen látszik, hogy a sor többi tagjának az atomszámai „együtt futnak” (a statisztikus ingadozásoktól eltekintve), és kb. 50-szer alacsonyabb értéknél, mint a sor első tagjáé.