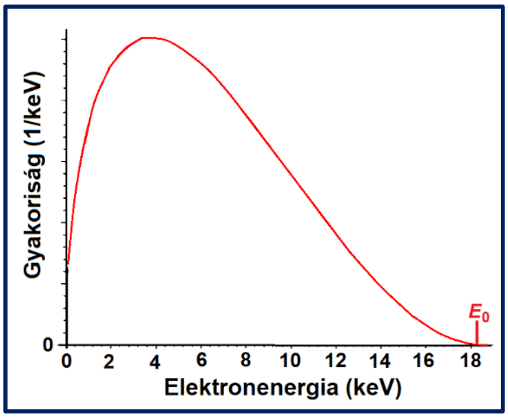
Országos Szilárd Leó Fizikaverseny Döntő 2024
Számítógépes szimulációs feladat
Elméleti bevezető

Béta-sugárzás spektrumának mérése Wien-szűrő segítségével

Tudjuk, hogy az atommagok béta-bomlásakor a kibocsátott elektron és antineutrínó „osztoznak" a bomláskor felszabaduló teljes energián. Emiatt a kibocsátott elektronok energiája a nullától egy maximális energiáig (E_0) bármilyen értéket felvehet. Az osztozás módja miatt a különböző energiájú elektronok különböző gyakorisággal jönnek.

Megjegyzés: Az „osztozásban" az atommag is részt vesz, de mivel tömege sokkal nagyobb, mint a másik két részecskéé, ezért az energián való osztozáshoz csak elhanyagolható mértékben járul hozzá.



Az elektronok gyakoriság szerinti eloszlását az elektronok energia-**spektruma** mutatja meg. Egy ilyen spektrumot mutat a mellékelt ábra. Ebben a szimulációban egy ilyen spektrum kimérése és a maximális energia értékének a minél pontosabb meghatározása lesz a feladat.

A legegyszerűbb természetesen az, ha van olyan detektorunk, amely a ráeső elektronok energiáját azonnal megmérné, és egy hisztogramot tudna előállítani annak alapján, hogy a mérési idő alatt a különböző energiájú elektronokból hány beütést tapasztalt. Ilyen, félvezető detektorokra alapozott spektroszkópok léteznek. Mi ma azonban egy elektromágneses eltérítésen alapuló, egyszerű készülékkel – a Wien-szűrővel – próbáljuk meghatározni a minta energiaspektrumát.

A spektrum és mérése

Mielőtt a konkrét feladatra rátérnénk, érdemes jobban megérteni a spektrum jelentését! Amikor részecskék energia szerint eloszlását mérjük, akkor a detektorunk beütésszámát a $\Delta N = N_0 \cdot f(E) \cdot \Delta E$ mennyiség szabja meg, ahol N_0 a mérési idő alatt a mérőberendezésbe belépett összes részecske száma, $f(E)$ a spektrum alakja, és ΔE az az „energia-ablak", amelybe eső részecskéket a mérőberendezésünk „kiválogatja", érzékeli. Ha az energia-ablak nagyon keskeny, ekkor hosszú ideig kell mérni, mivel ebbe csak nagyon kevés részecske érkezik (kicsi lesz a ΔN is). Nagyobb ΔE mellett viszont a berendezésünk energia-felbontása lesz rosszabb. Ezért általában ésszerű kompromisszumot kell kötni a ΔE megválasztásánál. Ennek alapján a spektrum mérése a következő egyszerű összefüggés alapján történhet:

$$f(E) = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta E} \qquad (1)$$

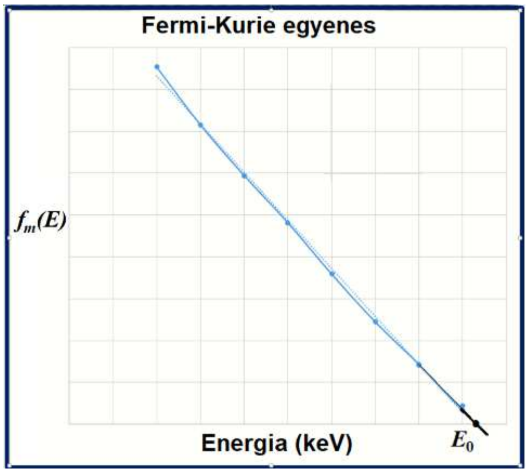
Ebből egyébként azt is megértjük, hogy miért [1/energia] a fenti spektrum függőleges tengelyének mértékegysége.
Az összefüggésből levonható fontos tapasztalat az, hogy nem elegendő mérni a ΔN beütésszámot, de ismerni kell a ΔE „energiaablak" nagyságát is!

A spektrum „vége" az E_0 bomlási energia meghatározása

A fenti példa spektrum alakjából látszik, hogy az E_0 bomlási energia pontos kísérleti meghatározása nem egyszerű, mert a függvény „belesimul" a vízszintes tengelybe, és emiatt nehéz pontosan meghatározni, hogy hol ér véget. Ezt a nehézséget oldja meg a Fermi-Kurie egyenes, amelynek bevezetése

E. Fermi olasz, és F.N.D. Kurie amerikai fizikus nevéhez fűződik. Ez a béta-spektrum „linearizálásán" alapul, amelyet a béta-bomlás E. Fermi által kidolgozott elmélete segítségével lehet végrehajtani. (Akit érdekel ennek a konkrét végrehajtása, a Függelékben megtalálhatja.)

Ennek az átalakításnak az az előnye, hogy a linearizált $f_m(E)$ az energiának lineáris függvénye (legalábbis az ún. „megengedett" típusú béta-bomlásoknál, az E_0 bomlási energia környékén). Azaz $f_m(E) = \mathrm{konst} \cdot (E_0 - E)$. Ezért ezt a függvényt ábrázolva az egyenes pontosan E_0-nál metszi a vízszintes tengelyt, és ezzel a bomlási energia sokkal pontosabb meghatározását teszi lehetővé (lásd ábra). A versenyen egy előre beprogramozott EXCEL táblázat segít majd a mért $f(E)$ adatokból az $f_m(E)$ adatsor (a linearizálás) létrehozásában.



A Wien-szűrő működése

A Wien-szűrő egymásra merőleges, homogén elektromos és mágneses mezőt alkalmaz. Optimális esetben ezek a mezők még a bejövő töltött részecskék sebességére is merőlegesek. Ezért a részecskékre hat egy elektrosztatikus $\left(q\vec{\mathcal{E}}\right)$ és egy mágneses Lorentz erő $\left(q\left[\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right]\right)$. Itt q a részecske töltése (elektronok esetén negatív elemi töltés), $\vec{\mathbf{v}}$ a részecskék sebessége, $\vec{\mathcal{E}}$ az elektromos térerősség, és $\vec{\mathbf{B}}$ a mágneses indukció. Ez utóbbi három vektormennyiség. (Az $\vec{\mathcal{E}}$ jelölést az elektromos térerősségre az E energiától való megkülönböztetés miatt használjuk.) Az elektromos térerősség és a mágneses indukció alkalmas megválasztásával elérhető, hogy

$$q\vec{\mathcal{E}} - q\left[\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right] = 0 \text{ legyen,}$$

azaz a részecskére ható erők eredője nulla legyen. Ennek a feltétele (a térerősségek és a sebesség merőlegességén túl), hogy

$$v = \frac{\mathcal{E}}{B} \ .$$

(Itt a jobb oldalon lévő mennyiségek a térerősségek abszolút értékei.)
Ez azt jelenti, hogy egy ilyen eszköz a bejövő részecskék sebessége alapján képes válogatni, „szűrni". Ha tehát az eszközbe egy igen kis lyukon keresztül engedjük be a spektrumot alkotó, sok különböző sebességű részecskét, és egy azzal pontosan szemben lévő, nagyon kis lyukon keresztül léptetjük ki a detektorba, akkor azokat fogjuk észlelni, amelyeknek pontosan ekkora a sebességük, hiszen ezek egyenes vonalban egyenletesen fognak haladni. Az ettől eltérő sebességű részecskékre eredő erő hat, ezért el fognak térülni, és beleütköznek valahol az eszköz falába[1]. Természetesen ahhoz, hogy a sebességeket végtelenül pontosan határozzuk meg, a réseknek is végtelen kicsinek kellene lenni – ami gyakorlati szempontból megvalósíthatatlan. Véges méretű rések esetén mindig lesz egy kis $(v, v+\Delta v)$ intervallum, amelybe eső részecskék átjutnak a szűrőn. Ez az intervallum fogja meghatározni a szűrő „energiaablakát" is.

[1] Egyes beállításoknál olyan görbült pálya is ki tud alakulni, amelynél a részecske éppen ki tud lépni a szűrőből. Az ilyen pályákra nem érvényes a fenti szűrési feltétel. Ezért minden beállításnál érdemes megfigyelni a pályák alakját.

Függelék

A spektrum „linearizálásának" módja:

Képezzük a „megmért" $f\left(E\right)$ spektrumból a következő kifejezést:

$$f_m\left(E\right)=\left[\frac{f\left(E\right)}{F\left(Z,E\right)\cdot\left(E+mc^2\right)\cdot\sqrt{\left(E+mc^2\right)^2-\left(mc^2\right)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Itt m az elektron nyugalmi tömege, Z a bomlás utáni leánymag rendszáma, $F\left(Z,E\right)$ pedig az úgynevezett Fermi-függvény.

A Fermi-függvény: $F\left(Z,E\right)\cong\dfrac{2\pi\eta}{1-e^{-2\pi\eta}}$, ahol $\eta=Z\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{\hbar c}\right)\cdot\dfrac{E+mc^2}{\sqrt{E(E+2mc^2)}}$.

A Fermi-féle elmélet alapján bizonyítható, hogy az ún. „megengedett" típusú béta-bomlásoknál az E_0 bomlási energia környezetében $f_m\left(E\right)=\mathrm{konst}\cdot\left(E_0-E\right)$.

Megjegyezzük, hogy η képletében zárójelben lévő, dimenzió nélküli mennyiség az általában α-val jelölt finomszerkezeti állandó, amely az elektromágneses kölcsönhatás „erősségére" jellemző: $\alpha=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{\hbar c}\approx\dfrac{1}{137}$.

Ha még azt is észrevesszük, hogy a fenti képletben $\dfrac{E+mc^2}{\sqrt{E(E+2mc^2)}}=\dfrac{c}{v}\equiv\dfrac{1}{\beta}$, ahol v az elektron sebessége, akkor a fenti képlet nagyon egyszerűen megjegyezhető: $\eta=Z\dfrac{\alpha}{\beta}\approx\dfrac{Z}{137\beta}$.